THEME 8

REDACTION PYTHAGORE ET SA RECIPROQUE

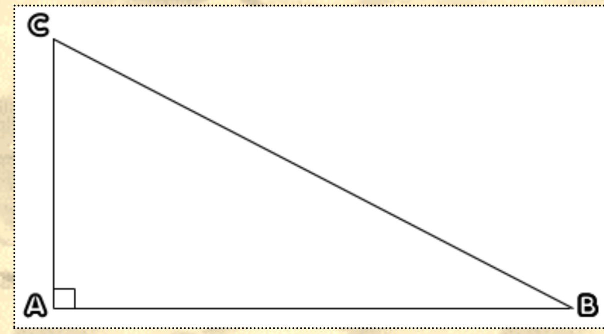
THEOREME DE PYTHAGORE :

▶ Si ABC est un triangle rectangle en A , alors $|BC|^2 = |BA|^2 + |AC|^2$

Autrement formulé :

▶ Dans un triangle rectangle, le carré de <u>l'hypoténuse</u> est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

Ce théorème sert, principalement, à calculer un côté d'un triangle <u>rectangle</u> , connaissant les deux autres.

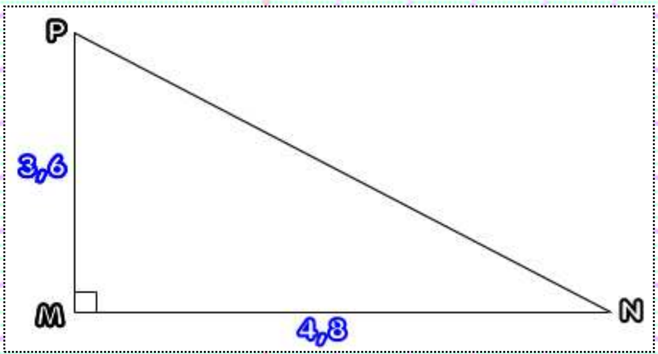


THEOREME DE PYTHAGORE

TRIANGLE RECTANGLE

Exemple 1 :

L'unité est le centimètre.
Soit MNP un triangle rectangle en M tel que $|MP| = 3,6$ et $|MN| = 4,8$.
Calculer $|NP|$.



Le texte nous présente un triangle <u>rectangle</u> avec deux côtés connus. Le théorème de Pythagore peut certainement nous permettre de calculer le troisième.

Rédaction (explication):

PARTIE 1 : Ecriture du théoreme sans valeurs numériques

① Dans le triangle MNP rectangle en M,

> On nomme le triangle dans lequel nous allons travailler, en précisant , qu'il est rectangle (Le théorème de Pythagore ne peut être utilisé que dans un triangle rectangle)

② nous avons, d'après le théorème de Pythagore :

> On nomme le théorème employé.

③ $|NP|^2 = |NM|^2 + |MP|^2$

> On écrit le théorème de Pythagore avec les lettres définissant le triangle.

PARTIE 2 : Utilisation du théoreme avec les valeurs numériques

④ $|NP|^2 = 4{,}8^2 + 3{,}6^2$

> On remplace $|NM|$ par 4,8 et $|MP|$ par 3,6.

⑤ $|NP|^2 = 23{,}04 + 12{,}96$

> On peut utiliser la touche $\boxed{x^2}$ de la calculatrice

⑤ $|NP|^2 = 36$

⑥ $\boxed{|NP| = \sqrt{36} = 6}$

> On utilise la touche $\boxed{\sqrt{\ }}$ de la calculatrice

Rédaction :

Dans le triangle MNP rectangle en M,
nous avons, d'après le théorème de Pythagore :

$|NP|^2 = NM^2 + MP^2$

$|NP|^2 = 4{,}8^2 + 3{,}6^2$

$|NP|^2 = 23{,}04 + 12{,}96$

$|NP|^2 = 36$

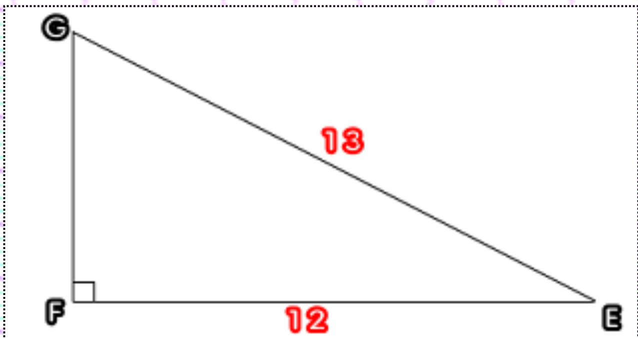
$|NP| = \sqrt{36} = 6$ $\boxed{|NP| = 6}$

Exemple 2 :

L'unité est le centimètre.

Soit EFG un triangle rectangle en F tel que $|EF| = 12$ et $|EG| = 13$.

Calculer $|FG|$.



Rédaction (explication):

PARTIE 1 : Ecriture du théoreme sans valeurs numériques

① Dans le triangle EFG rectangle en F,

② nous avons, d'après le théorème de Pythagore :

③ $|EG|^2 = |EF|^2 + |FG|^2$

ATTENTION

DANGER

On écrit le théorème de Pythagore avec les lettres définissant le triangle indépendamment des valeurs numériques.
Attention, l'erreur souvent commise est d'écrire que :
$|FG|^2 = |EF|^2 + |EG|^2$ (puisque l'on cherche $|FG|$!)
Le théorème de Pythagore dit que le carré de l'hypoténuse est égal à… , **pas** le carré du côté que l'on cherche !!!

PARTIE 2 : Utilisation du théoreme avec les valeurs numériques

④ $13^2 = 12^2 + |FG|^2$

⑤ $169 = 144 + |FG|^2$

⑤ $169 - 144 = |FG|^2$

⑥ $|FG|^2 = 25$

⑦ $|FG| = \sqrt{25} = 5$

En écrivant cette égalité, $|FG|^2$ est égal au nombre qu'il faut ajouter à 144 pour obtenir 169. Ce nombre est égal à la différence de 169 et de 144. D'où l'écriture suivante.

Rédaction :

Dans le triangle EFG rectangle en F,
nous avons, d'après le théorème de Pythagore :

$|EG|^2 = |EF|^2 + |FG|^2$

$13^2 = 12^2 + |FG|^2$

$169 = 144 + |FG|^2$

$169 - 144 = |FG|^2$

$|FG|^2 = 25$

$|FG| = \sqrt{25} = 5$

$\boxed{|FG| = 5}$

RECIPROQUE DU THEOREME DE PYTHAGORE :

▶ Soit ABC un triangle.
Si $|BC|^2 = |BA|^2 + |AC|^2$, alors ABC est un triangle rectangle en A.

Remarque : Notion de réciproque :

Un théorème (ou une propriété) est une phrase vraie (démontrée) qui s'énonce toujours, après avoir précisé les objets utilisés :

Si …………………………………………, alors …………………………………………

Par exemple, nous connaissons le théorème suivant :

Si un nombre entier se termine par 5 , alors ce nombre est divisible par 5.

La première phrase (la première proposition) s'appelle l'hypothèse et la seconde phrase (la deuxième proposition) s'appelle la conclusion.

Un théorème est donc une écriture démontrée du type :

Le théorème ci-contre peut également s'exprimer sans suivre la construction Si…. alors … . Il peut, par exemple, s'énoncer ainsi :
« Un nombre qui se termine par 5 est divisible par 5 ».

(Objets mathématiques utilisés)

Si $\underbrace{\text{..}}_{\text{Hypothèse(s)}}$, alors $\underbrace{\text{...........................}}_{\text{Conclusion(s)}}$

Lorsque cette écriture est démontrée et donc est qualifiée de théorème, nous pouvons chercher si la réciproque de ce théorème est vraie.

La réciproque s'obtient en intervertissant Hypothèse(s) et Conclusion(s).

(Objets mathématiques utilisés)

Si $\underbrace{\text{...........................}}_{\text{Conclusion(s)}}$, alors $\underbrace{\text{..}}_{\text{Hypothèse(s)}}$.

Attention, la réciproque n'est pas nécessairement vraie, c'est à dire que cette réciproque ne devient pas nécessairement un nouveau théorème.

Si nous reprenons le théorème énoncé précédemment :

Si un nombre entier se termine par 5 , alors ce nombre est divisible par 5.

la réciproque devient :

Si un nombre entier est divisible par 5 , alors ce nombre se termine par 5.

Un simple contre-exemple permet d'affirmer que cette phrase est fausse.

Par exemple le nombre 10 est divisible par 5 , mais ne se termine pas par 5 !!! (Voir ci-contre)

Donc la réciproque du théorème énoncé est fausse.

Cet unique exemple permet d'affirmer que la phrase proposée est fausse. Un tel exemple (qui permet de contredire la « propriété ») s'appelle un contre-exemple. Retenons que des exemples, même nombreux, ne constituent pas une preuve, mais un contre-exemple est une preuve.

Revenons au théorème de Pythagore.

Ce théorème s'énonce ainsi :

Si ABC est un triangle rectangle en A , alors $|BC|^2 = |BA|^2 + |AC|^2$

La réciproque de ce théorème est donc :

Si $|BC|^2 = |BA|^2 + |AC|^2$, alors ABC est un triangle rectangle en A

Cette nouvelle phrase étant vraie (démonstration proposée dans un autre document), elle devient un théorème appelé réciproque du théorème de Pythagore.

Le premier théorème énoncé s'appelle souvent le théorème direct. Si nous prenons la réciproque de la réciproque du théorème direct, nous obtenons le théorème direct !!! Ces deux théorèmes sont réciproques l'un de l'autre : le premier est la réciproque du second et le second est la réciproque du premier .
La réciproque de la réciproque du théorème de Pythagore est … le théorème de Pythagore.

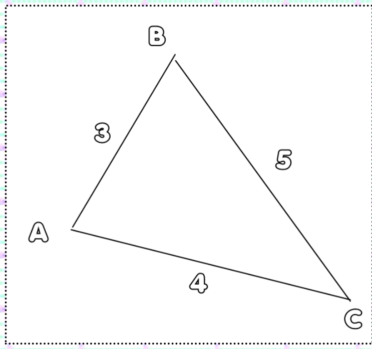
Ce nouveau théorème (la réciproque du théorème de Pythagore) sert, lorsque l'on connaît les longueurs des trois côtés, à démontrer qu'un triangle est rectangle.

Exemple 3 :

L'unité est le centimètre.

Soit ABC un triangle vérifiant $|AB| = 3$, $|AC| = 4$ et $|BC| = 5$

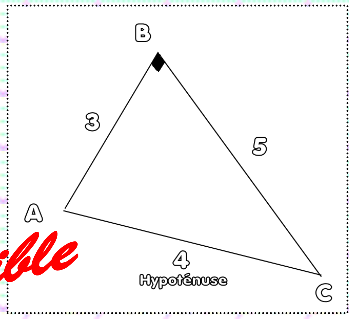
Le triangle ABC est-il rectangle ?



Petite réflexion avant rédaction :

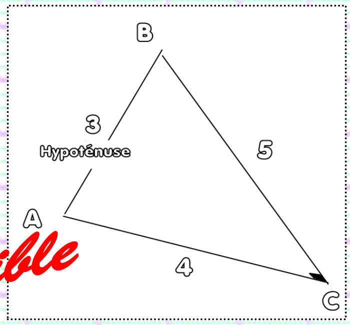
Le triangle ABC peut-il être rectangle en B ?

- S'il était rectangle en B , le côté [AC] (situé en « face » du sommet B) deviendrait l'hypoténuse de ce triangle. Or nous savons que l'hypoténuse est, dans un triangle rectangle, le plus grand côté. Or $|AC| = 4$; le côté [BC] serait plus grand ($|BC| = 5$).
  Donc le triangle ABC ne peut pas être rectangle en B.



Impossible

- S'il était rectangle en C , le côté [AB] (situé en « face » du sommet C) deviendrait l'hypoténuse de ce triangle. Or nous savons que l'hypoténuse est, dans un triangle rectangle, le plus grand côté. Or $|AB| = 3$; le côté [BC] serait plus grand ($|BC| = 5$).
  Donc le triangle ABC ne peut pas être rectangle en C.

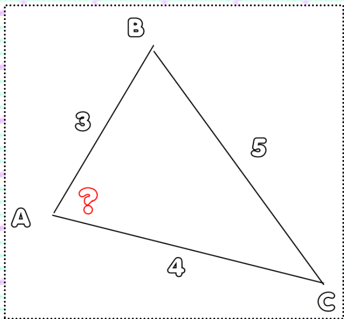


Impossible

Par suite, **si** le triangle ABC est rectangle, **alors** il ne peut être rectangle qu'au point A.

La question est maintenant plus précise :

▶ Le triangle ABC est-il rectangle en A ?



La réciproque du théorème de Pythagore semble être le théorème à utiliser.

Mais, avant d'y faire mention, nous devons démontrer une certaine égalité.

Laquelle ?

Si ce triangle ABC était rectangle en A (c'est une supposition) , alors, d'après le théorème (direct) de Pythagore, nous aurions :

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$$

Inversement, si nous pouvons démontrer que $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$, alors, nous pourrons, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, affirmer que le triangle ABC est rectangle en A.

Rédaction :

[BC] est le plus grand côté.

$|BC|^2 = 5^2 = 25$

$|AB|^2 + |AC|^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$

Donc $\quad |BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$

Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore,
le triangle ABC est rectangle en A.

<u>Remarque : Les fautes à ne pas faire !</u>

1

~~D'après la réciproque du théorème de Pythagore~~

$|BC|^2 = 5^2 = 25$

$|AB|^2 + |AC|^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$

Donc $\quad |BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$

Donc, le triangle ABC est rectangle en A.

La réciproque de Pythagore *(la relire éventuellement)* précise que **si** nous avons une certaine égalité, alors le triangle est rectangle. Nous ne pouvons utiliser cette réciproque qu'<u>après</u> avoir démontré l'égalité. Nous verrons, dans l'exemple suivant, que cette réciproque n'est pas utilisée lorsqu'il n'y a pas égalité.

2

$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$

pourquoi ?
on l'ignore.

$5^2 = 3^2 + 4^2$

$25 = 9 + 16$

$25 = 25$

Donc $\quad |BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore
le triangle ABC est rectangle en A.

Vous ne pouvez pas , sur le première ligne, écrire $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$.
Vous ignorez, à ce stade, s'il y a égalité ! Il faut calculer <u>**séparément**</u> $|BC|^2$ et $|AB|^2 + |AC|^2$.

$|BC|^2 = 5^2 = 25$

$|AB|^2 + |AC|^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$

Donc $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$

Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore,
le triangle ABC est rectangle en A.

Ne pas oublier d'écrire l'égalité qui nous permet d'utiliser la réciproque du théorème de Pythagore, à savoir « Donc $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$ »

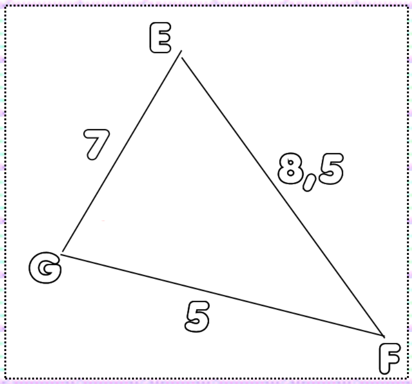
Exemple 4 :

L'unité est le centimètre.

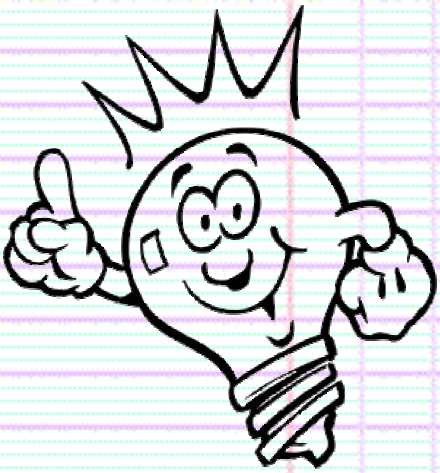
Soit EFG un triangle vérifiant $|FG| = 5$, $|EF| = 8{,}5$ et $|EG| = 7$

Le triangle EFG est-il rectangle ?

(Le dessin n'est donné qu'à titre indicatif. Il est, évidemment, faux)



Idée de démonstration :



Comme le plus grand côté de ce triangle est [EF], si le triangle EFG est rectangle, alors il ne peut être rectangle qu'au point G.

Comme dans l'exemple précédent, nous allons donc comparer $|EF|^2$ et $|EG|^2 + |GF|^2$.

S'il y avait égalité, alors, nous pourrions, à l'aide de la réciproque du théorème de Pythagore, affirmer que le triangle est rectangle !

Rédaction :

$|EF|^2 = 8{,}5^2 = \underline{72{,}25}$

$|EG|^2 + |GF|^2 = 5^2 + 7^2 = 25 + 49 = \underline{74}$

Donc $|EF|^2 \neq |EG|^2 + |GF|^2$

faux

Donc, d'après la ~~réciproque du~~ théorème de Pythagore,

le triangle ABC n'est pas rectangle.

La réciproque du théorème de Pythagore précise que s'il y a égalité, alors le triangle est rectangle. Mais aucune indication n'est donnée s'il n'y a pas égalité.
Considérons la phrase supposée vraie :

« S'il pleut, alors je mets des bottes. »

Nous donne-t-elle des renseignements s'il ne pleut pas ? Peut-on mettre des bottes s'il ne pleut pas ? La réponse est oui !
Il en est de même avec la réciproque de Pythagore. S'il y a égalité, le triangle est rectangle. S'il n'y a pas égalité, cette propriété ne permet pas de savoir si le triangle est rectangle ou pas !
Reprenons notre exemple précédent. Cette phrase « S'il pleut, alors je mets des bottes. » permet d'affirmer également que « Si je ne mets pas mes bottes, alors il ne pleut pas. » (car s'il pleut, je porte nécessairement des bottes !)
Cette nouvelle phrase obtenue en intervertissant les négations des deux propositions « il pleut » et « je mets des bottes » s'appelle la <u>contraposée</u> de la première phrase.
Le théorème de Pythagore :
« Si le triangle ABC est rectangle en A , alors $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$ *»*
a donc comme contraposée :
« Si $|BC|^2 \neq |AB|^2 + |AC|^2$*, alors le triangle ABC n'est pas rectangle »* *(inutile de préciser en A)*
C'est pourquoi nous devons écrire « d'après le théorème de Pythagore… » et non pas « d'après la réciproque du théorème de Pythagore. »

Si la proposition s'écrit :

$$\text{Si } \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{Hypothèse(s)}}\text{, alors } \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{Conclusion(s)}}$$

la contraposée de cette proposition s'écrit :

$$\underbrace{\text{Si Négation(}\ldots\ldots\ldots\text{)}}_{\text{Négation de Conclusion(s)}}\text{, alors Négation (}\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{Négation de Hypothèse(s)}}\text{) .}$$

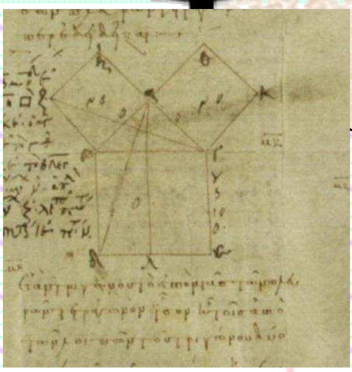
Si la première proposition est vraie , alors la seconde est vraie et inversement.

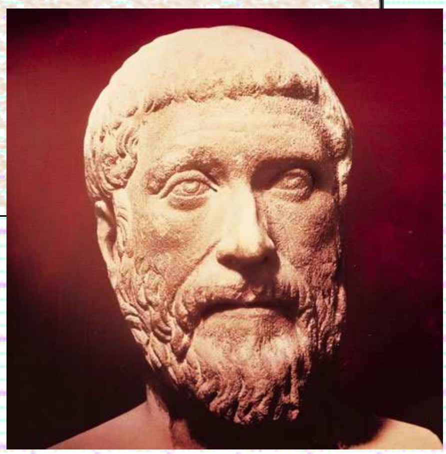
<u>Nouvelle rédaction :</u>

$|EF|^2 = 8{,}5^2 = \underline{72{,}25}$
$|EG|^2 + |GF|^2 = 5^2 + 7^2 = 25 + 49 = \underline{74}$
Donc $|EF|^2 \neq |EG|^2 + |GF|^2$

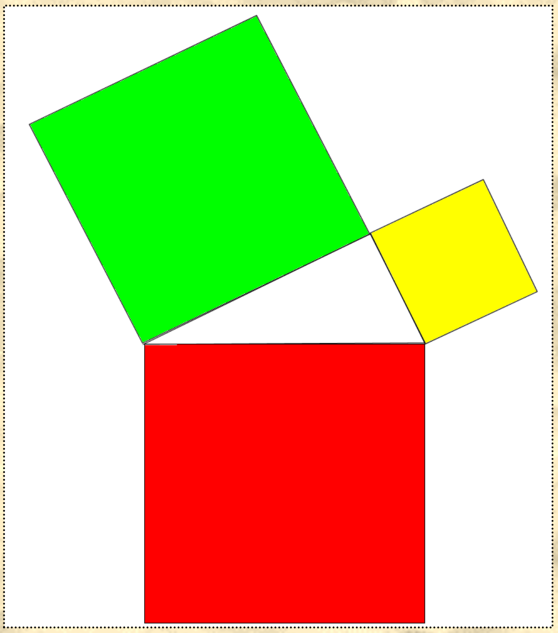
Donc, d'après <u>le théorème de Pythagore</u>,

le triangle ABC n'est pas rectangle.





Pythagore – L'image à avoir à l'esprit :



Si le triangle est rectangle , l'aire du carré construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des aires des carrés construits sur les côtés de l'angle droit.

Explications :

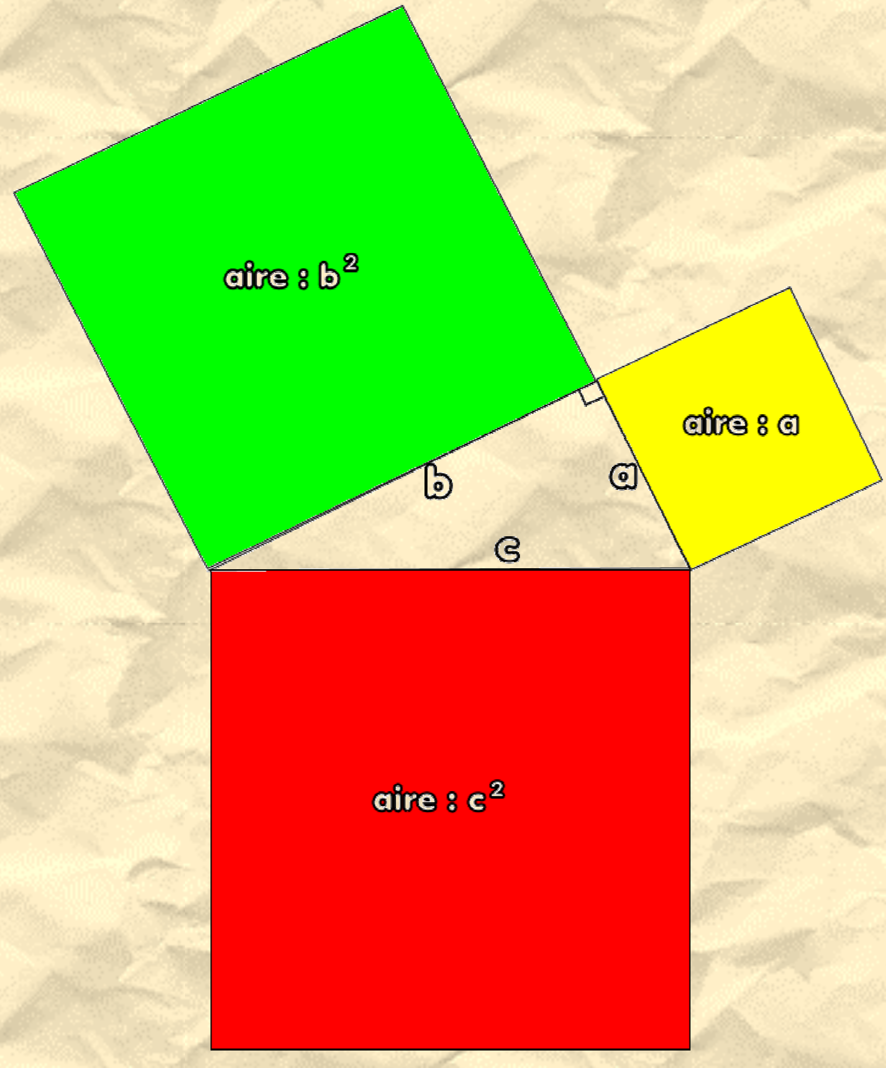
En appelant a, b et c les mesures des côtés du triangle rectangle (c est la mesure de l'hypoténuse) , nous avons , d'après le théorème de Pythagore

$$c^2 = a^2 + b^2$$

L'aire du carré construit sur l'hypoténuse est c^2

Les aires des carrés construits sur les côtés de l'angle droit sont a^2 et b^2.

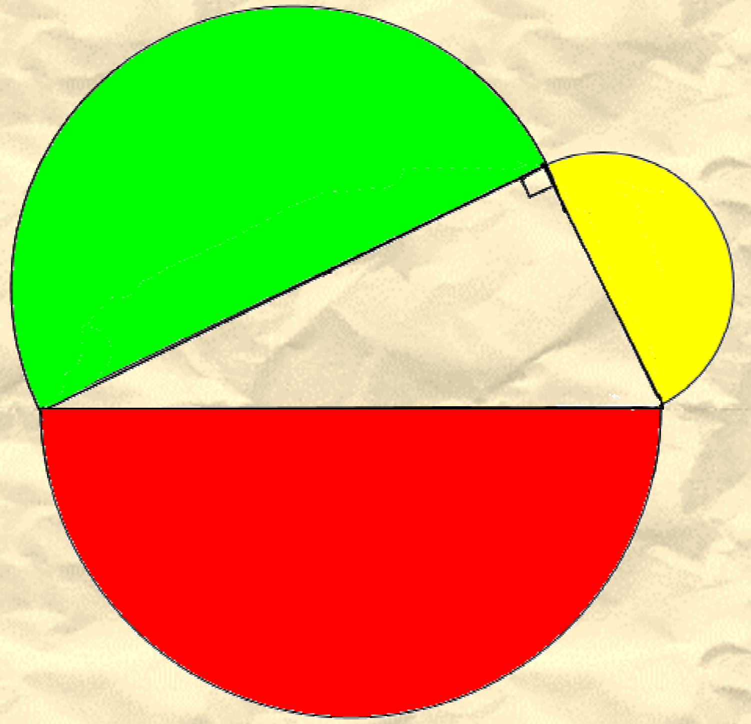
Comme $c^2 = a^2 + b^2$, l'aire du carré construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des aires des carrés construits sur les côtés de l'angle droit.

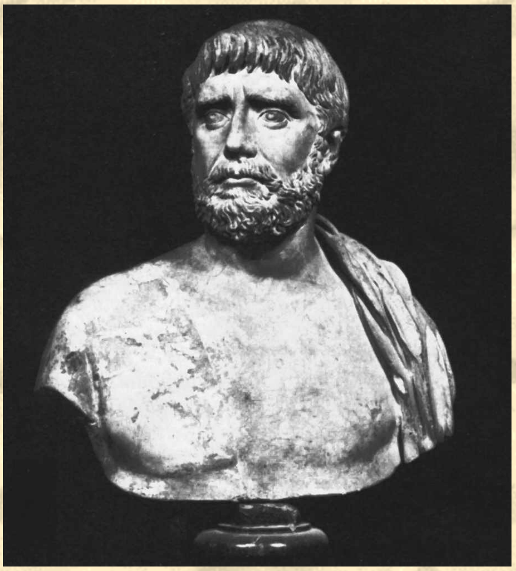


Cette remarque se généralise à d'autres figures.

- Si le triangle est rectangle , l'aire du triangle équilatéral construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des aires des triangles équilatéraux construits sur les côtés de l'angle droit.

- Si le triangle est rectangle , l'aire du demi-cercle construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des aires des demi-cercles construits sur les côtés de l'angle droit.
- Etc.





La table de multiplication appelée usuellement Table de Pythagore :

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Pythagore :
Ce beau cratère de 130 Km de diamètre est une des formations les plus visibles du bord nord-ouest de la lune

Sources internet : de castillon. étab. ac-caen