Exploitation – Les puissances à exposants entiers

Questions relatives à la restitution des connaissances

1) Explique par un raisonnement complet pourquoi $\dfrac{1}{a^{-n}} = a^n$ ($n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}_0$)

2) À quelle condition une puissance d'un nombre non nul peut-elle s'écrire sous la forme d'un produit de facteurs égaux ?

3) Voici la définition d'une puissance à exposant négatif :

   si $a \in \mathbb{R}_0$ et $n \in \mathbb{N}$, alors $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

   a) Pourquoi le nombre a doit-il être non nul ?
   b) Pourquoi le nombre n est-il défini comme étant naturel ?

4) L'utilisation des puissances à exposants entiers permet de généraliser la règle de réduction du quotient de deux puissances de même base.
   Explique par un raisonnement complet et en justifiant chaque étape de celui-ci pourquoi

   $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ($a \in \mathbb{R}_0$ et $m, n \in \mathbb{Z}$)

Questions relatives à l'application et à l'exploitation de la matière vue en classe

1) Lequel des nombres suivants n'est pas égal à 0,000000625 ?

a) $6{,}25 \cdot 10^{-7}$ b) $\frac{25}{4} \cdot 10^{-7}$ c) $6250 \cdot 10^{-10}$ d) $\frac{5}{8} \cdot 10^{-7}$ e) $\frac{5}{8} \cdot 10^{-6}$

2) Calcule la valeur des expressions numériques suivantes.

5^{-2}	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$	$-2 \cdot 3^{-2}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-2}$
3^{-4}	$(-2)^{-3}$	$(-2^{-2})^{-3}$	$\left(\frac{0{,}01}{0{,}2}\right)^{-3}$
14^{-1}	$\left(\sqrt{3}\right)^{-2}$	$(0{,}03)^{-2}$	$\frac{3^{-2}}{2^{-3}}$
$\left(\frac{1}{4}\right)^{-4}$	$(3\sqrt{2})^{-2}$	$7 \cdot 7^{-1}$	$(\sqrt{7})^{-2} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{-1}$
$\left(-\frac{3}{5}\right)^{-2}$	$(\sqrt{5}-1)^{-1}$	$10^{-5} \cdot 0{,}001 \cdot 10^{8}$	$\frac{3^{-2}}{2^{-3}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

3) Pour chaque calcul, une seule des quatre réponses est correcte. A toi de la retrouver !

Calcul	Réponse 1	Réponse 2	Réponse 3	Réponse 4
2^{-4}	-2^{4}	$(-2)^{4}$	$\frac{1}{16}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$
-2^{-3}	6	8	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$
$(-3)^{-4}$	12	81	$\frac{1}{81}$	$-\frac{1}{81}$
$1{,}6 \cdot 10^{-5}$	160000	0,000016	0,00016	– 0,00016
$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$	$\frac{9}{16}$	$-\frac{9}{16}$	$\frac{16}{9}$	$-\frac{16}{9}$
$\frac{5^{-2}}{5^{2}}$	1	5^{4}	5^{-4}	-5^{4}
$3^{2} \cdot 3^{-3}$	3^{-6}	3^{-1}	3^{-5}	-3
$\left(\sqrt{3}\right)^{-2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$
$(-3^{-2})^{-3}$	-3^{6}	3^{6}	$\left(\frac{1}{9}\right)^{3}$	$(-3)^{-5}$
$4 - 5^{-1}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{19}{5}$	-1	$\frac{3}{5}$

4) Détermine la valeur de x.

$a^{-6} . a^{x} = a^{-12}$ $\qquad$ $a^{x} . a^{3} = a^{-4}$ $\qquad$ $(a^{x})^{-6} = a^{12}$

$(a^{-3})^{x} = a^{-6}$ $\qquad$ $3a . (2a)^{x} = 12a^{3}$ $\qquad$ $(a^{-3})^{2} . a^{-2} = a^{x}$

$(2a^{x})^{-6} = (4a^{2})^{-3}$ $\qquad$ $a^{x} . a^{-4} = 1$ $\qquad$ $a^{x} . a^{4+x} = a^{-8}$

$a^{x+2} . a^{x-2} = a^{-6}$ $\qquad$ $(a^{-x}) . (a^{x})^{-2} = a^{-9}$ $\qquad$ $a^{3x-1} . a^{2-x} = a^{7}$

5) Détermine la (les) valeur(s) de a.

$a^{-1} = 3,5$ $\qquad$ $a^{-1} = 3$ $\qquad$ $a^{-1} = -8$

$a^{2} = 2^{-6}$ $\qquad$ $-5 . a^{-3} = a^{-4}$ $\qquad$ $a^{-4} = 5,0625 . 10^{-8}$

$a^{-1} = 5^{-2}$ $\qquad$ $a^{-3} = \dfrac{1}{125}$ $\qquad$ $3a^{-1} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{-1}$

6) Encadre les nombres ci-dessous par deux nombres entiers consécutifs.

3^{-1} $\qquad$ $(-3)^{-1}$ $\qquad$ $(0,3)^{-1}$ $\qquad$ $(-2)^{-2}$

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$ $\qquad$ $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^{-2}$ $\qquad$ $\left(-\dfrac{2}{5}\right)^{-1}$ $\qquad$ $\left(\sqrt{3}\right)^{-1}$

7) Voici trois nombres.

$n_1 = \dfrac{3 . 10^{2} . 5 . 10^{4}}{12 . (10^{2})^{3}}$ $\qquad$ $n_2 = \dfrac{10^{-8} . 0,7 . 10^{12}}{21 . 10^{3}}$ $\qquad$ $n_3 = \dfrac{54 . 10^{-1} - 83 . 10^{-2}}{10^{-2}}$

En notant ta démarche, écris :

le nombre n_1 sous la forme d'un produit d'un nombre entier le plus petit possible et d'une puissance de 10;

le nombre n_2 sous la forme d'une fraction irréductible;

le nombre n_3 sous forme d'un nombre décimal.

Nom : .... Prénom : .... Classe : ....

8) Voici deux nombres : $n_1 = 1\ 245\ 789$ et $n_2 = 10\ 887\ 655$

a) Donne, sous la forme d'une puissance de 10, une approximation de chaque nombre.

b) Donne un ordre de grandeur sous forme d'une puissance de 10 des nombres suivants:

$n_1 . n_2$ $\qquad \frac{n_1}{n_2}$ $\qquad n_1^{2}$ $\qquad n_2^{-3}$ $\qquad n_1 + n_2$ $\qquad n_1 - n_2$

9) Jean affirme que 10^3 est un ordre de grandeur de 2^{10} et que 10^9 est un ordre de grandeur de 2^{30}.
A-t-il raison ? Explique.