

Remédiation - Puissances à exposants entiers

A) Calcul de puissances numériques

1) Puissances numériques à exposants positifs

Dans les exercices ci-dessous, la seule difficulté est de déterminer le signe de la réponse.

$$3^2 = 9$$

$$(-3)^2 = 9$$

$$-3^2 = -9$$

$$(-4)^3 = -64$$

$$4^3 = 64$$

$$-4^3 = -64$$

2) Puissances numériques à exposants négatifs

Pour calculer une puissance numérique à exposant négatif, il faut d'abord rendre l'exposant positif.

Exemples : $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

$$(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$$

Rends les exposants positifs, puis calcule.

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$(-4)^{-3} = \frac{1}{(-4)^3} = \frac{1}{-64} = -\frac{1}{64}$$

$$(-7)^{-2} = \frac{1}{(-7)^2} = \frac{1}{49}$$

$$7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$$

$$(-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^3} = \frac{1}{-125} = -\frac{1}{125}$$

$$5^{-4} = \frac{1}{5^4} = \frac{1}{625}$$

$$-10^{-2} = -\frac{1}{10^2} = -\frac{1}{100}$$

$$(-10)^{-2} = \frac{1}{(-10)^2} = \frac{1}{100}$$

Sans essayer de calculer, donne le signe de la réponse.

$$17^{-4} \quad +$$

$$(-34)^{-2} \quad +$$

$$-23^2 \quad -$$

$$(-23)^2 \quad +$$

$$42^{-5} \quad +$$

$$(-45)^{-3} \quad -$$

$$-74^2 \quad -$$

$$(-74)^{-2} \quad +$$

$$(-27)^3 \quad -$$

$$(-27)^{-3} \quad -$$

$$(-27)^{-4} \quad +$$

$$(-27)^4 \quad +$$

Calcule.

$$-6^2 = -36$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$6^{-2} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$$

$$(-3)^2 = 9$$

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$$

$$(-2)^3 = -8$$

$$-3^2 = -9$$

B) Propriétés des puissances à exposants positifs

RAPPEL

Produit de puissances de même base

Pour multiplier des puissances de même base, on conserve la base et on additionne les exposants.

Exemples	$a^3 \cdot a^5 = a^{3+5} = a^8$	$2a^2 \cdot 5a^4 = (2 \cdot 5) \cdot (a^2 \cdot a^4) = 10 a^6$
	$4a \cdot 2a = (4 \cdot 2) \cdot (a \cdot a) = 8a^2$	$-2a \cdot 3a^2 = (-2 \cdot 3) \cdot (a^1 \cdot a^2) = -6 a^3$

Fais de même en notant tous les détails de ta démarche.

$a^2 \cdot a^4 = a^{2+4} = a^6$	$3a \cdot 5a = (3 \cdot 5) \cdot (a^1 \cdot a^1) = 15 a^2$
$2a^3 \cdot 3a^2 = (2 \cdot 3) \cdot (a^3 \cdot a^2) = 6 a^5$	$-4a^2 \cdot 3a^5 = (-4 \cdot 3) \cdot (a^2 \cdot a^5) = -12 a^7$
$2a \cdot 3a^5 = (2 \cdot 3) \cdot (a^1 \cdot a^5) = 6 a^6$	$-a \cdot (-3a) = (-1 \cdot (-3)) \cdot (a^1 \cdot a^1) = 3 a^2$

Puissance d'une puissance

Pour élever une puissance à une autre puissance, on conserve la base et on multiplie les exposants.

Exemple $(a^3)^5 = a^{3 \cdot 5} = a^{15}$

Fais de même en notant tous les détails de ta démarche.

$(a^5)^2 = a^{5 \cdot 2} = a^{10}$	$(b^3)^3 = b^{3 \cdot 3} = b^9$	$(a^3)^4 = a^{3 \cdot 4} = a^{12}$
------------------------------------	---------------------------------	------------------------------------

Puissance d'un produit

Pour élever un produit de facteurs à une puissance, on élève chaque facteur à cette puissance.

Exemples	$(3 \cdot a)^2 = 3^2 \cdot a^2 = 9 a^2$	$(a^2 \cdot b^3)^4 = (a^2)^4 \cdot (b^3)^4 = a^8 b^{12}$
	$(-2 \cdot a)^3 = (-2)^3 \cdot a^3 = -8 a^3$	$(2 \cdot a^4)^3 = 2^3 \cdot (a^4)^3 = 8 a^{12}$

Fais de même en notant tous les détails de ta démarche.

$(5 \cdot x)^2 = 5^2 \cdot x^2 = 25 x^2$	$(xy^3)^4 = x^4 \cdot (y^3)^4 = x^4 \cdot y^{12}$
$(-3 \cdot x)^2 = (-3)^2 \cdot x^2 = 9 x^2$	$(3a^2)^2 = 3^2 \cdot (a^2)^2 = 9 a^4$
$(-2 \cdot a)^5 = (-2)^5 \cdot a^5 = -32 a^5$	$(-2a^6)^3 = (-2)^3 \cdot (a^6)^3 = -8 a^{18}$
$(10 \cdot c)^3 = 10^3 \cdot c^3 = 1000 c^3$	$(5ab)^3 = 5^3 \cdot a^3 \cdot b^3 = 125 a^3 b^3$
$(a^5 \cdot b^2)^3 = (a^5)^3 \cdot (b^2)^3 = a^{15} b^6$	$(3ab^4)^2 = 3^2 \cdot a^2 \cdot (b^4)^2 = 9 a^2 b^8$

Puissance d'une fraction

Pour élever une fraction à une puissance, on élève chaque terme de la fraction à cette puissance.

Exemples $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$ $\left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{x^3}{2^3} = \frac{x^3}{8}$ $\left(\frac{a^3}{b^5}\right)^2 = \frac{(a^3)^2}{(b^5)^2} = \frac{a^6}{b^{10}}$

Fais de même en notant tous les détails de ta démarche.

$\left(\frac{x}{3z}\right)^2 = \frac{x^2}{(3z)^2} = \frac{x^2}{3^2 z^2} = \frac{x^2}{9z^2}$ $\left(\frac{2a}{3b}\right)^3 = \frac{(2a)^3}{(3b)^3} = \frac{2^3 a^3}{3^3 b^3} = \frac{8a^3}{27b^3}$	$\left(\frac{a^5}{b^4}\right)^3 = \frac{(a^5)^3}{(b^4)^3} = \frac{a^{15}}{b^{12}}$ $\left(\frac{3a}{b^3}\right)^4 = \frac{(3a)^4}{(b^3)^4} = \frac{3^4 a^4}{(b^3)^4} = \frac{81a^4}{b^{12}}$
---	--

EXERCICES

Reconnais la propriété qu'il faut utiliser, puis effectue en notant éventuellement les détails de ton raisonnement.

$4a^2 \cdot 5a^3 = (4 \cdot 5) \cdot (a^2 \cdot a^3) = 20 a^5$ $(-4a^2)^3 = (-4)^3 \cdot (a^2)^3 = -64 a^6$ $(a^4)^2 = a^8$ $(-4a)^2 = (-4)^2 \cdot a^2 = 16 a^2$ $\left(\frac{4a}{b}\right)^3 = \frac{(4a)^3}{b^3} = \frac{4^3 a^3}{b^3} = \frac{64a^3}{b^3}$ $-4a \cdot 5a^2 = (-4 \cdot 5) \cdot (a \cdot a^2) = -20 a^3$ $(-10x^3)^3 = (-10)^3 \cdot (x^3)^3 = -1000 x^9$ $(3ab)^2 = 3^2 \cdot a^2 \cdot b^2 = 9 a^2 b^2$ $5a \cdot (-3a) = [5 \cdot (-3)] \cdot (a \cdot a) = -15 a^2$ $\left(\frac{ab^2}{4c^2}\right)^4 = \frac{a^4 (b^2)^4}{4^4 (c^2)^4} = \frac{a^4 b^8}{256c^8}$ $(-2x^2)^3 = (-2)^3 \cdot (x^2)^3 = -8 x^6$ $(-2a) \cdot (-3a) = [-2 \cdot (-3)] \cdot (a \cdot a) = 6 a^2$ $(ab^2c^3)^2 = a^2 \cdot (b^2)^2 \cdot (c^3)^2 = a^2 b^4 c^6$ $-3(a^2b^3)^4 = -3 \cdot (a^2)^4 \cdot (b^3)^4 = -3 a^8 b^{12}$ $-2a^3 \cdot 3a^4 = (-2 \cdot 3) \cdot (a^3 \cdot a^4) = -6 a^7$	$(-2x)^5 = (-2)^5 \cdot x^5 = -32 x^5$ $-4 \cdot (a^5)^2 = -4 a^{10}$ $(3a^3)^3 = 3^3 \cdot (a^3)^3 = 27 a^9$ $(-5a^2)^2 = (-5)^2 \cdot (a^2)^2 = 25 a^4$ $\left(\frac{a^3b}{c^2}\right)^4 = \frac{(a^3)^4 b^4}{(c^2)^4} = \frac{a^{12}b^4}{c^8}$ $-5a^2 \cdot a^2 = -5 \cdot (a^2 \cdot a^2) = -5 a^4$ $-3 \cdot (a^3)^2 = -3 a^6$ $-5a^5 \cdot 5a^5 = (-5 \cdot 5) \cdot (a^5 \cdot a^5) = -25 a^{10}$ $(-5a^5)^3 = (-5)^3 \cdot (a^5)^3 = -125 a^{15}$ $\left(\frac{-2a^2}{b^3}\right)^5 = \frac{(-2)^5 (a^2)^5}{(b^3)^5} = \frac{-32a^{10}}{b^{15}}$ $(-2a^3b)^4 = (-2)^4 \cdot (a^3)^4 \cdot b^4 = 16 a^{12} b^4$ $(4ab^2)^3 = 4^3 \cdot a^3 \cdot (b^2)^3 = 64 a^3 b^6$ $(-a^3bc^2)^4 = (-a^3)^4 \cdot b^4 \cdot (c^2)^4 = a^{12} b^4 c^8$ $(-3a^2b)^2 = (-3)^2 \cdot (a^2)^2 \cdot b^2 = 9 a^4 b^2$ $(-5a^5)^2 = (-5)^2 \cdot (a^5)^2 = 25 a^{10}$
--	---

C) Propriétés des puissances à exposants entiers

Les propriétés des puissances à exposants positifs restent valables pour des puissances à exposants négatifs. Tu trouveras ci-dessous des exercices types souvent résolus de deux manières différentes. Lis attentivement, trouve la technique qui TE paraît la plus simple et applique-la aux exercices proposés.

o Type 1

$$a^3 \cdot a^{-5} = \frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^2} \qquad b^{-4} \cdot b^7 = \frac{b^7}{b^4} = b^3$$

$$a^3 \cdot a^{-5} = a^{-2} = \frac{1}{a^2} \qquad b^{-4} \cdot b^7 = b^3$$

Exercices

$$x^7 \cdot x^{-3} = \frac{x^7}{x^3} = x^4$$

$$x^{-3} \cdot x^{-2} = \frac{1}{x^3 \cdot x^2} = \frac{1}{x^5}$$

$$c^{-3} \cdot c^6 = \frac{c^6}{c^3} = c^3$$

$$c^2 \cdot c^{-7} = \frac{c^2}{c^7} = \frac{1}{c^5}$$

$$y^{-3} \cdot y^3 = \frac{y^3}{y^3} = 1$$

$$y^{-5} \cdot y^{-5} = \frac{1}{y^5 y^5} = \frac{1}{y^{10}}$$

o Type 2

$$\frac{a^5}{a^7} = \frac{1}{a^2}$$

$$\frac{b^3}{b^{-6}} = b^3 \cdot b^6 = b^9$$

$$\frac{c^{-4}}{c^{-5}} = c^{-4} \cdot c^5 = c$$

$$\frac{a^5}{a^7} = a^5 \cdot a^{-7} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

$$\frac{c^{-4}}{c^{-5}} = \frac{c^5}{c^4} = c$$

Exercices

$$\frac{d^5}{d^8} = \frac{1}{d^3}$$

$$\frac{d^{-4}}{d^5} = \frac{1}{d^5 d^4} = \frac{1}{d^9}$$

$$\frac{x^{-4}}{x^{-7}} = \frac{x^7}{x^4} = x^3 \text{ ou } x^{-4} \cdot x^7 = x^3$$

$$\frac{x^8}{x^{-6}} = x^8 \cdot x^6 = x^{14}$$

o Type 3

$$(a^{-3})^2 = a^{-6} = \frac{1}{a^6}$$

$$(b^4)^{-3} = b^{-12} = \frac{1}{b^{12}}$$

$$(c^{-2})^{-3} = c^6$$

$$(a^{-3})^2 = \left(\frac{1}{a^3}\right)^2 = \frac{1}{a^6}$$

$$(b^4)^{-3} = \left(\frac{1}{b^4}\right)^3 = \frac{1}{b^{12}}$$

$$(c^{-2})^{-3} = \left(\frac{1}{c^2}\right)^{-3} = (c^2)^3 = c^6$$

Exercices

$$(c^{-2})^3 = c^{-6} = \frac{1}{c^6}$$

$$(c^{-4})^{-2} = c^8$$

$$(d^2)^{-5} = d^{-10} = \frac{1}{d^{10}}$$

$$(d^{-7})^{-3} = d^{21}$$

o Type 4

$$(ab)^{-3} = a^{-3} \cdot b^{-3} = \frac{1}{a^3 b^3}$$

$$(a^3 b^{-2})^{-4} = a^{-12} \cdot b^8 = \frac{b^8}{a^{12}}$$

$$(ab)^{-3} = \left(\frac{1}{ab}\right)^3 = \frac{1}{a^3 b^3}$$

$$(a^3 b^{-2})^{-4} = \left(\frac{a^3}{b^2}\right)^{-4} = \left(\frac{b^2}{a^3}\right)^4 = \frac{b^8}{a^{12}}$$

Exercices

$$(xy)^{-4} = \left(\frac{1}{xy}\right)^4 = \frac{1}{x^4 y^4}$$

$$(a^{-3} b^4)^{-2} = a^6 b^{-8} = \frac{a^6}{b^8}$$

$$(x^{-2} y^4)^{-5} = x^{10} y^{-20} = \frac{x^{10}}{y^{20}}$$

$$(ab^{-4})^3 = a^3 b^{-12} = \frac{a^3}{b^{12}}$$

o Type 5

$$(2a^4)^{-3} = 2^{-3} \cdot a^{-12} = \frac{1}{2^3 a^{12}} = \frac{1}{8a^{12}}$$

$$(4a^{-3})^{-2} = 4^{-2} \cdot a^6 = \frac{a^6}{4^2} = \frac{a^6}{16}$$

$$(2a^4)^{-3} = \left(\frac{1}{2a^4}\right)^3 = \frac{1}{8a^{12}}$$

$$(4a^{-3})^{-2} = \left(\frac{1}{4a^{-3}}\right)^2 = \left(\frac{a^3}{4}\right)^2 = \frac{a^6}{16}$$

$$(4a^{-3})^{-2} = \left(\frac{1}{4a^{-3}}\right)^2 = \frac{1}{16a^{-6}} = \frac{a^6}{16}$$

Exercices

$$(3y)^{-2} = \left(\frac{1}{3y}\right)^2 = \frac{1}{9y^2}$$

$$(2a)^{-3} = \left(\frac{1}{2a}\right)^3 = \frac{1}{8a^3}$$

$$(-4a)^{-2} = \left(\frac{1}{-4a}\right)^2 = \frac{1}{16a^2}$$

$$(-2x)^{-5} = \left(\frac{1}{-2x}\right)^5 = \frac{-1}{32x^5}$$

$$(3c^{-2})^{-3} = 3^{-3} c^6 = \frac{1}{3^3} \cdot c^6 = \frac{c^6}{27}$$

$$(-2a^{-5})^{-4} = (-2)^{-4} a^{20} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot a^{20} = \frac{a^{20}}{16}$$

$$(-10d^{-2})^{-3} = (-10)^{-3} d^6 = \frac{-1}{10^3} d^6 = \frac{-d^6}{1000}$$

$$(5d^{-3})^{-2} = 5^{-2} d^6 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot d^6 = \frac{d^6}{25}$$

o Type 6

$$\left(\frac{a^5}{b^2}\right)^{-3} = \frac{a^{-15}}{b^{-6}} = \frac{b^6}{a^{15}}$$

$$\left(\frac{a^{-4}}{b^2}\right)^{-5} = \frac{a^{20}}{b^{-10}} = a^{20} b^{10}$$

$$\left(\frac{a^5}{b^2}\right)^{-3} = \left(\frac{b^2}{a^5}\right)^3 = \frac{b^6}{a^{15}}$$

$$\left(\frac{a^{-4}}{b^2}\right)^{-5} = \left(\frac{1}{a^4 b^2}\right)^{-5} = (a^4 b^2)^5 = a^{20} b^{10}$$

Exercices

$$\left(\frac{x^2}{y^5}\right)^{-2} = \frac{x^{-4}}{y^{-10}} = \frac{y^{10}}{x^4}$$

$$\left(\frac{x^{-4}}{y^5}\right)^{-5} = \frac{x^{20}}{y^{-25}} = x^{20} y^{25}$$

$$\left(\frac{a^{-2}}{b^{-4}}\right)^{-4} = \frac{a^8}{b^{16}}$$

$$\left(\frac{a^4}{b^{-2}}\right)^4 = \frac{a^{16}}{b^{-8}} = a^{16} b^8$$

Exercices de synthèse

$$a^{-7} \cdot a^3 = \frac{a^3}{a^7} = \frac{1}{a^4}$$

$$(4a^{-2})^{-3} = 4^{-3} \cdot a^6 = \frac{1}{4^3} \cdot a^6 = \frac{a^6}{64}$$

$$\frac{x^{-6}}{x^3} = \frac{1}{x^3 x^6} = \frac{1}{x^9}$$

$$(a^5)^{-2} = a^{-10} = \frac{1}{a^{10}}$$

$$(3a)^{-2} = \left(\frac{1}{3a}\right)^2 = \frac{1}{9a^2}$$

$$\left(\frac{x^{-2}}{y^5}\right)^{-3} = \frac{x^6}{y^{-15}} = x^6 y^{15}$$

$$4a^{-2} \cdot 2a^{-7} = (4 \cdot 2) \cdot a^{-2-7} = 8 \cdot a^{-9} = \frac{8}{a^9}$$

$$(2x^{-3})^{-3} = 2^{-3} \cdot x^9 = \frac{1}{2^3} \cdot x^9 = \frac{x^9}{8}$$

$$(3ab^{-2})^{-4} = \left(\frac{1}{3ab^2}\right)^4 = \frac{1}{3^4 a^4 b^8} = \frac{b^8}{81a^4}$$

$$\left(\frac{b^2}{c^{-4}}\right)^3 = \frac{b^6}{c^{-12}} = b^6 c^{12}$$

$$\left(\frac{3b^{-2}}{a^{-4}}\right)^{-2} = \frac{3^{-2} b^4}{a^8} = \frac{b^4}{3^2 a^8} = \frac{b^4}{9a^8}$$

$$(5x^{-5})^2 = 5^2 \cdot x^{-10} = 25 \cdot \frac{1}{x^{10}} = \frac{25}{x^{10}}$$

$$\left(\frac{x^{-3}}{y^4}\right)^{-2} = \frac{x^6}{y^{-8}} = x^6 y^8$$

$$(ab^{-3}c^2)^{-4} = a^{-4} b^{12} c^{-8} = \frac{b^{12}}{a^4 c^8}$$

$$(a^{-3}b^5)^{-4} = a^{12} b^{-20} = \frac{a^{12}}{b^{20}}$$

$$-2a^{-4} \cdot 3a^4 = (-2 \cdot 3) \cdot a^{-4+4} = -6 \cdot a^0 = -6$$

$$(-4a^{-2}b^3)^{-3} = (-4)^{-3} a^6 b^{-9} = \frac{a^6}{(-4)^3 b^9} = \frac{-a^6}{64b^9}$$

$$(-4a)^2 = 16 a^2$$

$$\left(\frac{2x^2}{y^{-5}}\right)^{-3} = \left(\frac{y^{-5}}{2x^2}\right)^3 = \frac{y^{-15}}{2^3 x^6} = \frac{1}{8x^6 y^{15}}$$

$$-5a^2 \cdot 2a^{-5} = -10 \cdot a^{-3} = \frac{-10}{a^3}$$

$$(2a^{-3})^{-2} = 2^{-2} \cdot a^6 = \frac{1}{2^2} \cdot a^6 = \frac{a^6}{4}$$

$$(3y^2)^{-3} = \left(\frac{1}{3y^2}\right)^3 = \frac{1}{27y^6}$$

$$\frac{a^5}{a^{-2}} = a^5 \cdot a^2 = a^7$$

$$(10a^{-4})^{-3} = 10^{-3} \cdot a^{12} = \frac{1}{10^3} \cdot a^{12} = \frac{a^{12}}{1000}$$

$$(-5x^2)^{-2} = \frac{1}{(-5x^2)^2} = \frac{1}{25x^4}$$

$$\left(\frac{2x^3}{y^{-5}}\right)^{-3} = \frac{2^{-3} x^{-9}}{y^{15}} = \frac{1}{2^3 x^9 y^{15}} = \frac{1}{8x^9 y^{15}}$$

$$(a^{-1}b^3c^{-4})^{-3} = a^3 b^{-9} c^{12} = \frac{a^3 c^{12}}{b^9}$$

$$(a^3b^{-3})^{-4} = a^{-12} b^{12} = \frac{b^{12}}{a^{12}}$$

$$(-5a^{-1}b^2)^{-3} = (-5)^{-3} a^3 b^{-6} = \frac{a^3}{(-5)^3 b^6} = \frac{-a^3}{125b^6}$$

$$\left(\frac{b}{b^{-4}}\right)^{-2} = \frac{b^{-2}}{b^8} = \frac{1}{b^8 b^2} = \frac{1}{b^{10}}$$

$$\left(\frac{2x^{-3}}{y^4}\right)^3 = \frac{2^3 x^{-9}}{y^{12}} = \frac{8}{x^9 y^{12}}$$

$$\left(\frac{2a^{-2}}{a^4}\right)^{-4} = \frac{2^{-4} a^8}{a^{-16}} = \frac{a^8 a^{16}}{2^4} = \frac{a^{24}}{16}$$

$$2a^4 \cdot (-2a^{-4}) = 2 \cdot (-2) \cdot a^{4-4} = -4 a^0 = -4$$

$$\left(\frac{-3x^2}{y^{-5}}\right)^{-2} = \frac{(-3)^{-2} x^{-4}}{y^{10}} = \frac{1}{(-3)^2 x^4 y^{10}} = \frac{1}{9x^4 y^{10}}$$