Nom : .... Prénom : .... Classe : ....

Remédiation
Division d'un polynôme par un binôme de la forme (x-a)

1) Tableau d'Horner

Pour trouver le quotient et le reste de la division d'un polynôme par un binôme de la forme (x – a), tu peux utiliser le tableau d'Horner.

L'exemple ci-dessous te rappelle comment tu dois procéder.

$D(x) = x - \mathbf{3}$ $\qquad$ $A(x) = \mathbf{2}\,x^3 \mathbf{- 1}\,x^2 \mathbf{- 19}\,x \mathbf{+ 17}$

Coefficients de A(x)	**+2**	**- 1**	**- 19**	**+17**	
a = 3		6	15	- 12	
	. 3	. 3	. 3		
Coefficients de Q(x)	+ 2	+ 5	- 4	+ 5	Reste

$Q(x) = + \mathbf{2}\,x^2 \mathbf{+ 5}\,x \mathbf{- 4}$ $\qquad$ $r = + \mathbf{5}$

Fais de même pour les exercices ci-dessous.

$A(x) = 4x^3 - 3x^2 - 5x + 1$
$D(x) = x - 2$

Coefficients de A(x)	......	......	......	......
a = ...		......	......	......
Coefficients de Q(x)	......	......	......	......

Q(x) = ...

r = ...

$A(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$
$D(x) = x - 3$

Coefficients de A(x)	......	......	......	......
a = ...		......	......	......
Coefficients de Q(x)	......	......	......	......

Q(x) = ...

r = ...

2) Remarques importantes

a) Si le dividende (A) n'est pas complet, il faut le compléter par des termes de coefficients nuls.

$A(x) = x^4 + 3x^2 - 5 \Rightarrow A(x) = x^4 + \mathbf{0x^3} + 3x^2 + \mathbf{0x} - 5$

b) Si le diviseur (D) est un binôme de la forme (x + b), il faut le transformer sous la forme (x – (-b))

$D(x) = (x + 5) \Rightarrow D(x) = (x - (-5)) \Rightarrow a = \mathbf{-\ 5}$

c) Le degré du quotient s'obtient par l'égalité suivante : d°Q(x) = d°A(x) – 1

$A(x) = x^4 + 3x^2 - 5$ et $D(x) = x + 5$ d°A(x) = 4 ⇒ d°Q(x) = 3

En tenant compte des 3 remarques précédentes, détermine le quotient et le reste de la division de $x^4 + 3x^2 - 5$ par $x + 5$.

Coefficients de A(x)	......	......	......	......	......
a = ...		......	......	......	......
Coefficients de Q(x)	......	......		......	......

Q(x) = ...

r = ...

Fais de même pour les exercices ci-dessous. Attention, c'est à toi à déterminer le nombre de colonnes de chaque tableau.

$A(x) = x^3 - 7x^2 - 4$
$D(x) = x - 3$

Coefficients de A(x)	......	......	......	......	......
a = ...		......	......	......	......
Coefficients de Q(x)	......	......	......	......	......

Q(x) = ...

r = ...

$A(x) = x^4 - 3x^3 + x - 1$
$D(x) = x + 2$

Coefficients de A(x)	......	......	......	......	......
a = ...		......	......	......	......
Coefficients de Q(x)	......	......	......	......	......

Q(x) = ...

r = ...

$A(x) = 3x^3 - 7x^2 + 5x - 10$
$D(x) = x - 2$

Coefficients de A(x)	......	......	......	......	......
a = ...		......	......	......	......
Coefficients de Q(x)	......	......	......	......	......

Q(x) = ...

r = ...

$A(x) = 5x^4 - 3x^2 + 2$
$D(x) = x - 3$

Coefficients de A(x)	......	......	......	......	......
a = ...		......	......	......	......
Coefficients de Q(x)	......	......	......	......	......

Q(x) = ...

r = ...

$A(x) = x^2 - 7x + 12$
$D(x) = x - 4$

Coefficients de A(x)	......	......	......	......	......
a = ...		......	......	......	......
Coefficients de Q(x)	......	......	......	......	......

Q(x) = ...

r = ...

$A(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 3$
$D(x) = x + 1$

Coefficients de A(x)	......	......	......	......	......
a = ...		......	......	......	......
Coefficients de Q(x)	......	......	......	......	......

Q(x) = ...

r = ...

$A(x) = x^3 - 2x^2 + x - 6$
$D(x) = x + 2$

Coefficients de A(x)	......	......	......	......	......
a = ...		......	......	......	......
Coefficients de Q(x)	......	......	......	......	......

Q(x) = ...

r = ...

$A(x) = x^3 + 27$
$D(x) = x + 3$

Coefficients de A(x)	......	......	......	......	......
a = ...		......	......	......	......
Coefficients de Q(x)	......	......	......	......	......

Q(x) = ...

r = ...

3) Reste de la division

Il est possible, sans effectuer le quotient, de trouver le reste de la division d'un polynôme par un binôme de la forme (x - a). Pour cela, il suffit de calculer la valeur numérique de A(x) en remplaçant x par la valeur de "a".

Tu peux trouver la justification de cette propriété dans la partie théorique d'Actimath 3 (6 p. 251).

Exemple $A(x) = 3x^3 - 7x^2 + 5x - 10$ $D(x) = x - 2$

Le reste de la division de $3x^3 - 7x^2 + 5x - 10$ par x - 2 se calcule par

$A(2) = 3.2^3 - 7.2^2 + 5.2 - 10 = 3.8 - 7.4 + 5.2 - 10 = 24 - 28 + 10 - 10 = - 4$

Calcule le reste de la division du polynôme A(x) par le binôme(x - a).

A(x)	D(x)	Calcul du reste
$2x^2 - 2x - 4$	x - 3	....
$2x^2 - 2x - 4$	x + 1	....
$x^3 - 8$	x - 2	....
$x^3 - 8$	x - 1	....
$x^3 - x^2 + 4x + 4$	x + 3	....
$x^3 - x^2 + 4x + 4$	x - 1	....
$2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$	x - 3	....
$2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$	x - 2	....
$2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$	x + 2	....

Nom : ………………………… Prénom : ………………………… Classe : …………………

4) Divisibilité par (x – a) et factorisation

a) Le diviseur (x – a) est connu

Si le reste de la division d'un polynôme A(x) par un binôme de la forme (x - a) est nul, alors il est possible d'utiliser le quotient pour factoriser le polynôme A(X).

En effet, la formule A(x) = D(x) . Q(x) + R(x) devient A(x) = (x – a) . Q(x)

Exemple $A(x) = 2x^3 – 9x^2 + 7x + 6$ D(x) = x – 2

$r = A(2) = 2.2^3 – 9.2^2 + 7.2 + 6 =$ …………………………………………

= …………………………………………

Coefficients de A(x)	……	……	……	……
a = …………		……	……	……
Coefficients de Q(x)	……	……	……	……

Q(x) = ……………………………

r = …………

$2x^3–9x^2+7x+6 = (x-2).($……………………)

Si le reste de la division de A(x) par (x - a) est nul, alors factorise A(X).

$A(x) = 2x^3 – 9x^2 + 11x - 6$
D(x) = x - 3

r = …………………………………………

…………………………………………

Coefficients de A(x)	……	……	……	……	……
a = …………		……	……	……	……
Coefficients de Q(x)	……	……	……	……	……

Q(x) = ……………………………

$2x^3 – 9x^2 + 11x - 6 = (x - 3)$. ……………………

$A(x) = x^3 – 5x - 2$
D(x) = x + 2

r = …………………………………………

…………………………………………

Coefficients de A(x)	……	……	……	……	……
a = …………		……	……	……	……
Coefficients de Q(x)	……	……	……	……	……

Q(x) = ……………………………

$x^3 – 5x - 2= (x + 2)$. ……………………

b) Le diviseur (x – a) n'est pas connu

Pour factoriser un polynôme A(x) par un binôme de la forme (x - a), il faut déterminer la valeur de "a". Celle-ci est nécessairement un diviseur du terme indépendant de A(x), mais il faut déterminer lequel ?

Ex : $x^3 - 2x^2 - 9 = (x - \ldots?\ldots) . (\ldots\ldots\ldots ? \ldots\ldots\ldots)$

Les diviseurs de -9 sont : 1, 3, 9, -1, -3, -9

Calculons les restes de la division de $x^3 - 2x^2 - 9$ par 1, par 3, ...

$r = A(1) = 1^3 - 2.1^2 - 9 = 1 - 2.1 - 9 = 1 - 2 - 9 = -10$

$r = A(3) = 3^3 - 2.3^2 - 9 = 27 - 2.9 - 9 = 27 - 18 - 9 = 0 \Rightarrow a = 3$

Coefficients de A(x)	1	-2	0	-9
a = 3		3	3	9
Coefficients de Q(x)	1	1	3	0

$Q(x) = 1x^2 + 1x + 3$

R = 0

$x^3 - 2x^2 - 9 = (x-3).(x^2 + x + 3)$

Détermine un binôme (x-a) par lequel A(x) est divisible, puis utilise le tableau d'Horner pour trouver le quotient de A(x) par ce binôme (x – a) et enfin factorise A(x).

$A(x) = x^3 + 5x^2 + 7x + 3$

$A(x) = x^2 - 5x + 6$

Actimath 3 – Chapitre 9 – Activité 8 pages 122 et 123

Actimath 3 – Chapitre 9 – Exercices complémentaires 21 à 23 pages 130