Remédiation
Division d'un polynôme par un binôme de la forme (x-a)

1) Tableau d'Horner

Pour trouver le quotient et le reste de la division d'un polynôme par un binôme de la forme (x – a), tu peux utiliser le tableau d'Horner.

L'exemple ci-dessous te rappelle comment tu dois procéder.

$D(x) = x - \underline{\mathbf{3}}$ $\qquad$ $A(x) = \underline{\mathbf{2}}\, x^3 \; \underline{\mathbf{-\ 1}}\, x^2 \; \underline{\mathbf{-\ 19}}\, x \; \underline{\mathbf{+\ 17}}$

Coefficients de A(x)	**+2**	**- 1**	**- 19**	**+17**	
a = 3		. 3 6	. 3 15	. 3 - 12	
Coefficients de Q(x)	+ 2	+ 5	- 4	+ 5	Reste

$Q(x) = +\,\mathbf{2}\,x^2 + \mathbf{5}\,x - \mathbf{4}$ $\qquad$ $r = +\,\mathbf{5}$

Fais de même pour les exercices ci-dessous.

$A(x) = 4x^3 - 3x^2 - 5x + 1$
$D(x) = x - 2$

Coefficients de A(x)	4	-3	-5	1
a = **2**		8	10	10
Coefficients de Q(x)	4	5	5	11

$Q(x) = \mathbf{4x^2 + 5x + 5}$

r = **11**

$A(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$
$D(x) = x - 3$

Coefficients de A(x)	1	-2	1	-3
a = **3**		3	3	12
Coefficients de Q(x)	1	1	4	9

$Q(x) = \mathbf{x^2 + x + 4}$

r = **9**

2) Remarques importantes

a) Si le dividende (A) n'est pas complet, il faut le compléter par des termes de coefficients nuls.

$A(x) = x^4 + 3x^2 - 5 \Rightarrow A(x) = x^4 + \mathbf{0x^3} + 3x^2 + \mathbf{0x} - 5$

b) Si le diviseur (D) est un binôme de la forme (x + b), il faut le transformer sous la forme (x – (-b))

$D(x) = (x + 5) \Rightarrow D(x) = (x - (-5)) \Rightarrow a = \mathbf{-\ 5}$

c) Le degré du quotient s'obtient par l'égalité suivante : $d°Q(x) = d°A(x) - 1$

$A(x) = x^4 + 3x^2 - 5$ et $D(x) = x + 5$ $\qquad d°A(x) = 4 \Rightarrow d°Q(x) = 3$

En tenant compte des 3 remarques précédentes, détermine le quotient et le reste de la division de $x^4 + 3x^2 - 5$ par $x + 5$.

Coefficients de A(x)	1	0	3	0	-5
a = – **5**		–5	25	–140	700
Coefficients de Q(x)	1	–5	28	–140	695

$Q(x) = \mathbf{x^3 - 5x^2 + 28x - 140}$

r = **695**

Fais de même pour les exercices ci-dessous. Attention, c'est à toi à déterminer le nombre de colonnes de chaque tableau.

$A(x) = x^3 - 7x^2 - 4$
$D(x) = x - 3$

Coefficients de A(x)	1	-7	0	-4
a = **3**		3	-12	-36
Coefficients de Q(x)	1	-4	-12	-40

$Q(x) = \mathbf{x^2 - 4x - 12}$

r = **– 40**

$A(x) = x^4 - 3x^3 + x - 1$
$D(x) = x + 2$

Coefficients de A(x)	1	-3	0	1	-1
a = **– 2**		-2	10	-20	38
Coefficients de Q(x)	1	-5	10	-19	37

$Q(x) = \mathbf{x^3 - 5x^2 + 10x - 19}$

r = **37**

$A(x) = 3x^3 - 7x^2 + 5x - 10$
$D(x) = x - 2$

Coefficients de A(x)	3	-7	5	-10
a = **2**		6	-2	6
Coefficients de Q(x)	3	-1	3	-4

Q(x) = $\mathbf{3x^2 - x + 3}$

r = **– 4**

$A(x) = 5x^4 - 3x^2 + 2$
$D(x) = x - 3$

Coefficients de A(x)	5	0	-3	0	2
a = **3**		15	45	126	378
Coefficients de Q(x)	5	15	42	126	380

Q(x) = $\mathbf{5x^3 + 15x^2 + 42x + 126}$

r = **380**

$A(x) = x^2 - 7x + 12$
$D(x) = x - 4$

Coefficients de A(x)	1	-7	12
a = **4**		4	-12
Coefficients de Q(x)	1	-3	0

Q(x) = $\mathbf{x - 3}$

r = **0**

$A(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 3$
$D(x) = x + 1$

Coefficients de A(x)	1	1	-2	1	3
a = **- 1**		-1	0	2	-3
Coefficients de Q(x)	1	0	-2	3	0

Q(x) = $\mathbf{x^3 - 2x + 3}$

r = **0**

$A(x) = x^3 - 2x^2 + x - 6$
$D(x) = x + 2$

Coefficients de A(x)	1	-2	1	-6
a = **- 2**		-2	8	-18
Coefficients de Q(x)	1	-4	9	-24

Q(x) = $\mathbf{x^2 - 4x + 9}$

r = **–24**

$A(x) = x^3 + 27$
$D(x) = x + 3$

Coefficients de A(x)	1	0	0	27
a = **- 3**		-3	9	-27
Coefficients de Q(x)	1	-3	9	0

Q(x) = $\mathbf{x^2 - 3x + 9}$

r = **0**

3) Reste de la division

Il est possible, sans effectuer le quotient, de trouver le reste de la division d'un polynôme par un binôme de la forme (x - a). Pour cela, il suffit de calculer la valeur numérique de A(x) en remplaçant x par la valeur de "a".

Tu peux trouver la justification de cette propriété dans la partie théorique d'Actimath 3 (6 p. 251).

Exemple $A(x) = 3x^3 - 7x^2 + 5x - 10$ $D(x) = x - 2$

Le reste de la division de $3x^3 - 7x^2 + 5x - 10$ par $x - 2$ se calcule par

$A(2) = 3.2^3 - 7.2^2 + 5.2 - 10 = 3.8 - 7.4 + 5.2 - 10 = 24 - 28 + 10 - 10 = -4$

Calcule le reste de la division du polynôme A(x) par le binôme(x - a).

A(x)	D(x)	Calcul du reste
$2x^2 - 2x - 4$	$x - 3$	**$A(3) = 2.3^2 - 2.3 - 4 = 2.9 - 2.3 - 4$ $= 18 - 6 - 4 = 8$**
$2x^2 - 2x - 4$	$x + 1$	**$A(-1) = 2.(-1)^2 - 2.(-1) - 4 = 2.1 + 2.1 - 4$ $= 2 + 2 - 4 = 0$**
$x^3 - 8$	$x - 2$	**$A(2) = 2^3 - 8 = 8 - 8 = 0$**
$x^3 - 8$	$x - 1$	**$A(1) = 1^3 - 8 = 1 - 8 = -7$**
$x^3 - x^2 + 4x + 4$	$x + 3$	**$A(-3) = (-3)^3 - (-3)^2 + 4.(-3) + 4$ $= -27 - 9 - 12 + 4 = -44$**
$x^3 - x^2 + 4x + 4$	$x - 1$	**$A(1) = 1^3 - 1^2 + 4.1 + 4 = 1 - 1 + 4 + 4 = 8$**
$2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$	$x - 3$	**$A(3) = 2.3^3 - 9.3^2 + 7.3 + 6 = 2.27 - 9.9 + 7.3 + 6$ $= 54 - 81 + 21 + 6 = 0$**
$2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$	$x - 2$	**$A(2) = 2.2^3 - 9.2^2 + 7.2 + 6 = 2.8 - 9.4 + 7.2 + 6$ $= 16 - 36 + 14 + 6 = 0$**
$2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$	$x + 2$	**$A(-2) = 2.(-2)^3 - 9.(-2)^2 + 7.(-2) + 6$ $= 2.(-8) - 9.4 + 7.(-2) + 6$ $= -16 - 36 - 14 + 6 = -60$**

4) Divisibilité par (x – a) et factorisation

a) Le diviseur (x – a) est connu

Si le reste de la division d'un polynôme A(x) par un binôme de la forme (x - a) est nul, alors il est possible d'utiliser le quotient pour factoriser le polynôme A(X).

En effet, la formule A(x) = D(x) . Q(x) + R(x) devient A(x) = (x – a) . Q(x)

Exemple $A(x) = 2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$ $\quad$ $D(x) = x - 2$

$r = A(2) = 2.2^3 - 9.2^2 + 7.2 + 6 = \mathbf{2.8 - 9.4 + 7.2 + 6 =}$

$\mathbf{= 16 - 36 + 14 + 6 = 0}$

Coefficients de A(x)	2	-9	7	6
a = 2		4	-10	-6
Coefficients de Q(x)	2	-5	-3	0

$Q(x) = \mathbf{2x^2 - 5x - 3}$

r = **0**

$2x^3 - 9x^2 + 7x + 6 = (x-2).(\mathbf{2x^2 - 5x - 3})$

Si le reste de la division de A(x) par (x - a) est nul, alors factorise A(X).

$A(x) = 2x^3 - 9x^2 + 11x - 6$
$D(x) = x - 3$

$r = \mathbf{A(3) = 2.3^3 - 9.3^2 + 11.3 - 6}$

$\mathbf{= 2.27 - 9.9 + 11.3 + 6 = 54 - 81 + 33 - 6 = 0}$

Coefficients de A(x)	2	-9	11	-6
a = 3		6	-9	6
Coefficients de Q(x)	2	-3	2	0

$Q(x) = \mathbf{2x^2 - 3x + 2}$

$2x^3 - 9x^2 + 11x - 6 = (x - 3) . \mathbf{(2x^2 - 3x + 2)}$

$A(x) = x^3 - 5x - 2$
$D(x) = x + 2$

$r = \mathbf{A(-2) = (-2)^3 - 5.(-2) - 2}$

$\mathbf{= -8 + 10 - 2 = 0}$

Coefficients de A(x)	1	0	-5	-2
a = -2		-2	4	2
Coefficients de Q(x)	1	-2	-1	0

$Q(x) = \mathbf{x^2 - 2x - 1}$

$x^3 - 5x - 2 = (x + 2) . \mathbf{(x^2 - 2x - 1)}$

b) Le diviseur (x – a) n'est pas connu

Pour factoriser un polynôme A(x) par un binôme de la forme (x - a), il faut déterminer la valeur de "a". Celle-ci est nécessairement un diviseur du terme indépendant de A(x), mais il faut déterminer lequel ?

Ex : $x^3 - 2x^2 - 9 = (x - \ldots?\ldots) . (\ldots\ldots\ldots ? \ldots\ldots\ldots)$

Les diviseurs de -9 sont : 1, 3, 9, -1, -3, -9

Calculons les restes de la division de $x^3 - 2x^2 - 9$ par x-1, par x-3, ...

$r = A(1) = 1^3 - 2.1^2 - 9 = 1 - 2.1 - 9 = 1 - 2 - 9 = -10$

$r = A(3) = 3^3 - 2.3^2 - 9 = 27 - 2.9 - 9 = 27 - 18 - 9 = 0 \Rightarrow a = 3$

Coefficients de A(x)	1	-2	0	-9
a = 3		3	3	9
Coefficients de Q(x)	1	1	3	0

$Q(x) = 1x^2 + 1x + 3$

R = 0

$x^3 - 2x^2 - 9 = (x-3).(x^2 + x + 3)$

Détermine un binôme (x-a) par lequel A(x) est divisible, puis utilise le tableau d'Horner pour trouver le quotient de A(x) par ce binôme (x – a) et enfin factorise A(x).

$A(x) = x^3 + 5x^2 + 7x + 3$

Les diviseurs de 3 sont –3, –1, 1 et 3

$A(-3) = (-3)^3 + 5.(-3)^2 + 7.(-3) + 3$
$= -27 + 45 - 21 + 3 = 0$

$A(-1) = (-1)^3 + 5.(-1)^2 + 7.(-1) + 3$
$= -1 + 5 - 7 + 3 = 0$

A(x) est divisible par x+3 et par x+1

Utilisons x + 3

Coefficients de A(x)	**1**	**5**	**7**	**3**
a = –3		**–3**	**–6**	**–3**
Coefficients de Q(x)	**1**	**2**	**1**	**0**

$Q(x) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$

$x^3 + 5x^2 + 7x + 3 = (x + 3).(x + 1)^2$

$A(x) = x^2 - 5x + 6$

Les diviseurs de 6 sont 1, 2, 3, 6 et –1, –2, –3 et –6

$A(1) = 1^2 - 5.1 + 6 = 1 - 5 + 6 = 2$

$A(2) = 2^2 - 5.2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$

$A(3) = 3^2 - 5.3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$

A(x) est divisible par x–2 et par x–3

Utilisons x – 2

Coefficients de A(x)	**1**	**–5**	**6**
a = 2		**2**	**–6**
Coefficients de Q(x)	**1**	**–3**	**0**

$Q(x) = x - 3$

$x^2 - 5x + 6 = (x - 2).(x - 3)$

Actimath 3 – Chapitre 9 – Activité 8 pages 122 et 123
Actimath 3 – Chapitre 9 – Exercices complémentaires 21 à 23 pages 130