Ch 9 Fractions algébriques

A. Définitions et vocabulaire : rappels (NAP P290 - AM P 253 partie A)

- Tous les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme de fractions à termes entiers sont des nombres rationnels.
- L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$
- L'écriture $\frac{a}{b}$ est l'écriture d'une fraction où a est le **Numérateur**

  b est le **Dénominateur différent de zéro**

  a et b sont les **TERMES** de la fraction

- Une fraction **algébrique** ou **rationnelle** est une expression algébrique fractionnaire dont les termes sont des polynômes.

Une fraction algébrique est aussi une division non exécutée, avec la différence que le diviseur et le dividende sont ici des expressions littérales.

Exemples : $\frac{x^2-4x+4}{x-3}$, $\frac{x+5}{x-2}$, $\frac{x+5}{x-\sqrt{2}}$ et $\frac{5}{a^2-9}$ **sont** des fractions rationnelles

$\frac{x+5}{\sqrt{x}}$ n'est **pas** une fraction rationnelle

B. Conditions d'existence (NAP P290 - AM P 253 partie B)

1) Notions

Pour qu'une fraction existe c'est-à-dire désigne un réel,
son **dénominateur** doit être **différent** de **zéro**.
Cette condition est appelée **condition d'existence** de la fraction.

2) Méthode :

- Ecrire le polynôme « dénominateur » et de ne **pas** l'égaler à zéro ;
- Résoudre l'équation ainsi formée ;
- Ecrire les conditions d'existence **en excluant** les valeurs trouvées dans la résolution de l'équation.

3) Exemples :

- La fraction $\frac{x^2-4x+4}{x-3}$ **existe** c'est-à-dire ne représente un nombre réel que

$\Leftrightarrow$ (si et seulement si) son **dénominateur** n'est **pas nul**

$\Leftrightarrow \quad x-3 \neq 0$

$\Leftrightarrow \quad x \neq 3 \qquad\qquad x \in \Re \setminus \{ 3 \}$

La condition d'existence de $\frac{x^2-4x+4}{x-3}$ est $x \neq 3$

Nous noterons CE pour désigner la condition d'existence.

- La fraction $\dfrac{4}{t^2-9}$ existe si $t \neq 3$ et $t \neq -3$

  En effet $\quad t^2 - 9 \neq 0$

  $\Leftrightarrow (t-3)\,(t+3) \neq 0$

  $\Leftrightarrow (t-3) \neq 0$ ***et*** $(t+3) \neq 0$

  $\Leftrightarrow t \neq 3$ ***et*** $t \neq -3$ $\qquad t \in \Re \setminus \{\,-3\,;\,3\,\}$

  Les conditions d'existence de $\dfrac{4}{t^2-9}$ sont $t \neq 3$ et $t \neq -3$

4) Exercices : Détermine les conditions d'existence (CE) de chacune des fractions suivantes

Série 1.

$\dfrac{1}{a-2}$

CE : $a - 2 \neq 0$

$\boxed{a \neq 2}$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$\dfrac{4}{t^2-4}$

CE : $t^2 - 4 \neq 0$

$(t+2)\cdot(t-2) \neq 0$

$t+2 \neq 0$ et $t-2 \neq 0$

$t \neq -2$ et $\boxed{t \neq 2}$

$t \in \mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$

$\dfrac{3a+3b}{3a-3b} = \dfrac{\cancel{3}(a+b)}{\cancel{3}(a-b)}$

CE $3(a-b) \neq 0$

$o \neq$ $\quad a - b \neq 0$

$\boxed{a \neq b}$

$\{\forall a, b \in \mathbb{R} \{a \neq b\}$

$\dfrac{6}{(x-1)(x-3)}$

CE : $(x-1)(x-3) \neq 0$

$x - 1 \neq 0$ et $x - 3 \neq 0$

$\boxed{x \neq 1}$ et $\boxed{x \neq 3}$

$x \neq 1 \quad x \neq 3$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1;3\}$.

$\dfrac{x-4}{x^2+5x+6}$

S $\quad$ P

2 $\quad$ 3

CE $(x+2)\cdot(x+3) \neq 0$

$(x+2) \neq 0$ et $x+3 \neq 0$

$\boxed{x \neq -2}$ et $\boxed{x \neq -3}$

$\mathbb{R} \setminus \{-3;-2\}$.

$(x+2)$

1 − 5 + 6

4 + 10 + 6

4 − 10 + 6 = 0

$\dfrac{x^2-5}{x^3-x^2}$

$D(1) \neq 0 \quad D(2) \neq 0$

$D(-1) \neq 0 \quad D(-2)$

$D(3) \neq 0$

$D(-3)$

9 − 15 + 6

$\mathbb{N}_0$

$x^2(x-1) \neq 0$

$x \neq 0$ et $x \neq 1$

$\mathbb{R} \setminus \{0;1\} = \mathbb{R}_0 \setminus \{1\}$

Conditions existence d'une fraction: exercices

Série 2. NAM P 125 n°C (AM P131 n°C)

$\dfrac{3x}{x+5}$

CE : $x+5 \neq 0$
$\boxed{x \neq -5}$
$\mathbb{R} \setminus \{-5\}$

$\dfrac{-2c}{3c-1}$

CE : $3c-1 \neq 0$
$3c \neq 1$
$c \neq \frac{1}{3}$
$\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$

$\dfrac{5a+2}{7}$

CE : $a \in \mathbb{R}$

$\dfrac{b-4}{b(b+4)}$

CE : $b(b+4) \neq 0$
$\boxed{b \neq 0}$ et $b+4 \neq 0$
$\boxed{b \neq -4}$
$b \in \mathbb{R}_0 \setminus \{-4\}$

$\dfrac{3x-2}{x^3-2x-2}$

$\dfrac{5a+1}{a^2-9}$

CE : $a^2 - 9 \neq 0$
$(a+3)(a-3) \neq 0$
$a+3 \neq 0$ et $a-3 \neq 0$
$a \neq -3$ et $a \neq 3$

$\dfrac{-7}{x^2+x}$

CE $x^2 + x \neq 0$
$x(x+1) \neq 0$
$x \neq 0$ et $x \neq -1$
$x \in \mathbb{R}_0 \setminus \{-1\}$
$x+1 \neq 0$
$x \neq -1$

$\dfrac{y^2-1}{2y^3-8y}$

CE : $2y^3 - 8y \neq 0$
$2y(y^2-4) \neq 0$
$2y(y+2)(y-2) \neq 0$
$y \neq 0$
$y+2 \neq 0$
$y \neq -2$
$y-2 \neq 0$
$y \neq 2$
$\{ y^2 - 4 \neq 0$
$\mathbb{R}_0 \setminus \{-2;2\}$

Conditions d' existence d'une fraction: exercices

$\frac{4x}{x^2-2x+1}$ CE: $x^2-2x+1 \neq 0$

trinôme carré parfait

$x \quad 1$

$2 \cdot x \cdot 1$

$(x-1)^2 \neq 0$

$x-1 \neq 0$

$\boxed{x \neq 1}$

$\boxed{S = \mathbb{R}\setminus\{1\}}$

$\frac{-x+1}{x^3+3x^2+2x+6}$ CE: $(x^3+3x^2)+(2x+6) \neq 0$

$x^2(x+3)+2(x+3) \neq 0$

$(x+3)(x^2+2) \neq 0$

$x+3 \neq 0$ et $x^2+2 \neq 0$

$x \neq -3$ $\qquad x^2 \neq -2$

toujours vrai ! $\mathbb{R}$

$S: x \in \mathbb{R}\setminus\{-3\}$

$\frac{5}{ab}$ CE: $a \cdot b \neq 0$

$a \neq 0$ et $b \neq 0$ $\quad a, b \in \mathbb{R}_0$

$\frac{3a}{b-c}$ CE: $b-c \neq 0$

$b \neq c$ $\quad \{\forall b, c \in \mathbb{R} \mid b \neq c\}$

$\frac{-1}{a+b}$ CE: $a+b \neq 0$

$a \neq -b$ $\quad \{\forall a, b \in \mathbb{R} \mid a \neq -b\}$

$\frac{5}{x^2-y^2}$ CE: $x^2-y^2 \neq 0$

$(x+y)(x-y) \neq 0$

$x+y \neq 0$ et $x-y \neq 0$.

$x \neq y$ et $x \neq -y$

$-y \neq x \neq y$

$\frac{2a}{6a-3b}$

C. Simplification

1) Notions (NAM P290-291 - AM P 253 c)

On peut multiplier ou diviser les deux termes d'une fraction par un même nombre non nul,

on obtient une fraction équivalente (≡ égale). avec a $\in \Re$ et b, c , m $\in \Re_0$

$\frac{4:4}{12:4} = \frac{1}{3}$

$\boxed{\frac{\cancel{4}}{\cancel{4}.3}} = \frac{1}{3}$

$$\frac{a.\cancel{m}}{b.\cancel{m}} = \frac{a}{b} \qquad \frac{a.m+b.m}{c.m} = \frac{\cancel{m}.(a+b)}{c.\cancel{m}} = \frac{a+b}{c} \qquad \frac{\cancel{2}.a}{\cancel{2}.b} = \frac{a}{b}$$

D'abord FACTORISER avant de simplifier.

> **Simplifier** une fraction rationnelle,
>
> c'est diviser les deux termes de cette fraction par un même polynôme **non nul.**

2) Méthode pour simplifier une fraction algébrique (NAM P 290 - AM P 253)

Pour factoriser une fraction rationnelle, il faut :

- **Factoriser** les polynômes des deux termes de la fraction ;
- Énoncer les conditions d'existence (CE) de cette fraction ;
- **Diviser** les deux termes de la fraction **par un même polynôme non nul** ;
- Enoncer les conditions de simplification (CS)

3) Conditions de simplification (NAM P 291 - AM P 254)

Les valeurs qui annulent le polynôme par lequel on divise les deux termes de la fraction rationnelle s'appellent les **conditions de simplification** (notées CS).

La condition d'existence d'une fraction n'est pas toujours identique à celle de sa forme simplifiée

Exemple :

$$\frac{x^2-9}{x^2-3x} = \frac{(x-\cancel{3})(x+3)}{x(x-\cancel{3})} = \frac{x+3}{x}$$

CE : $x^2 - 3x \neq 0$
$x(x-3) \neq 0$
$x \neq 0$ et $(x-3) \neq 0$
$x \neq 0$ et $x \neq 3$

CS : $x - 3 \neq 0$
$x \neq 3$

CE : $x \neq 0$

La condition de simplification précise que l'égalité n'est vraie que pour $x \neq 3$.

4) Remarque

Après factorisation du numérateur et/ou du dénominateur, il arrive parfois qu'un facteur du numérateur soit l'**opposé** d'un facteur du dénominateur. Voici comment les rendre **égaux**.

Exemple :

$$\frac{6-4x}{4x^2-9} = \frac{2(3-2x)}{(2x+3)(2x-3)} = \frac{-2(3-2x)}{(2x+3)(-2x+3)} = \frac{-2(\cancel{3-2x})}{(2x+3)(\cancel{3-2x})} = \frac{-2}{(2x+3)}$$

. (-1)

. (-1)

Simplification de fractions- CE : exercices

5) Exercices

Série 1. Factoriser ou ne pas factoriser ? Simplifier ou ne pas simplifier ?

Coche (…x…) les exercices pour lesquels tu ne peux factoriser ni le numérateur, ni le dénominateur.

Pour les exercices non cochés, factorise, puis simplifie si cela est possible. Sinon, recopie la fraction telle quelle.

$\forall x, y \in \mathbb{R}_0$

	$\frac{12x^2y}{18xy^4}$ CE : $x\cdot y^4 \neq 0$; $x \neq 0$ et $y^4 \neq 0$; $x \neq 0$ et $y \neq 0$ $\frac{2\cdot\cancel{6}\cdot\cancel{x}\cdot x\cdot\cancel{y}}{3\cdot\cancel{6}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{y}\cdot y\cdot y\cdot y}$ $= \frac{2x}{3y^3}$
	$\frac{4x-2}{2x}$ CE : $2x \neq 0$; $x \neq 0$; $x \in \mathbb{R}_0$ $= \frac{\cancel{2}\cdot(2x-1)}{\cancel{2}\cdot x} = \frac{2x-1}{x}$ TB !
!	$\frac{8ab}{8ab-1}$ CE : $8ab - 1 \neq 0$; $8ab \neq 1$; $\boxed{a\cdot b \neq \frac{1}{8}}$ On ne peut PAS simplifier ! BRAVO !
	$\frac{3x-6}{2x+4} = \frac{3\cdot(x-2)}{2\cdot(x+2)}$ CE : $x+2 \neq 0$; $x \neq -2$; $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$
	$\frac{-\cancel{8}\cancel{a}\cancel{b}}{\cancel{8}\cancel{a}\cancel{b}c} = \frac{-1}{c} = -\frac{1}{c}$ $\forall a, b$ et $c \in \mathbb{R}_0$

Simplification de fractions- CE : exercices

Puissances

$\dfrac{-x^2y^2}{xy}$	$= \dfrac{-x\,y}{} = -x\,y$ CE $xy \neq 0$ $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$ $-\dfrac{\cancel{x}\cdot x\,\cancel{y}\,y}{\cancel{x}\cdot\cancel{y}}$ $x, y \in \mathbb{R}_0$
$\dfrac{x^2-y^2}{x-y}$	$= \dfrac{(x+y)\cancel{(x-y)}}{\cancel{(x-y)}} = x+y$ CE: $x-y \neq 0$ $x \neq y$ $\{x, y \in \mathbb{R}\}\ x \neq y\}$
$\dfrac{5x}{25x^2}$	$= \dfrac{1}{5x}$ $\left(\dfrac{\cancel{x}}{x\cdot \cancel{x}}\right)$ CE $x \neq 0$ $\boxed{x \neq 0}$ $x \in \mathbb{R}_0$
$\dfrac{5-x}{25-x^2}$	$= \dfrac{\cancel{(5-x)}}{(5+x)\cancel{(5-x)}} = \dfrac{1}{5+x}$ CE: $25-x^2 \neq 0$ $(5+x)(5-x) \neq 0$ ... $\boxed{x \neq 5 \text{ et } x \neq -5}$
$\dfrac{x^3-4y^2}{x-y}$	$(5+x) \neq 0$ et $(5-x) \neq 0$ $\boxed{x \neq -5}$ et $-x \neq -5$ $\boxed{x \neq 5}$ $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5;5\}$ $= \dfrac{(x+2y)\cdot(x-2y)}{(x-y)}$

CÉ: $x - y \neq 0$

$x \neq y$

$\{\forall x, y \in \mathbb{R}\}\ x \neq y\}$

Simplification de fractions- CE : exercices

Série 2. Associe à chaque fraction sa forme simplifiée. (AM P 134)

$\frac{x^2-x}{2x-2}$	○	○	$\frac{2x}{3x-1}$
$\frac{4x}{6x-2}$	○	○	$\frac{x+y}{3}$
$\frac{x^2-y^2}{3x+3y}$	○	○	$\frac{-(x+y)}{3}$
$\frac{2x+2y}{6}$	○	○	$\frac{x}{2y}$
$\frac{x^2-y^2}{3y-3x}$	○	○	$\frac{x-y}{3}$
$\frac{4x^2y}{8xy^2}$	○	○	$\frac{x}{2}$

$\frac{x^2-x}{2x-2} = \frac{x\cancel{(x-1)}}{2\cancel{(x-1)}} = \frac{x}{2}$

CE : $x-1 \neq 0$

CS

$x \neq 1$

$x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$

$\frac{4x}{6x-2} = \frac{2\cdot 2x}{2(3x-1)} = \frac{2x}{(3x-1)}$

$3x-1 \neq 0$

$3x \neq 1$

$x \neq \frac{1}{3}$

$\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{3}\}$

$\frac{x^2-y^2}{3x+3y} = \frac{(x-y)\cancel{(x+y)}}{3\cancel{(x+y)}} = \boxed{\frac{x-y}{3}}$ ou $= \frac{1}{3}(x-y)$

CE $x+y \neq 0$

$\boxed{x \neq -y}$

$\{\forall x; y \in \mathbb{R} \mid x \neq -y\}$

$\frac{2x+2y}{6} = \frac{2(x+y)}{6_3} = \frac{x+y}{3}$

$x; y \in \mathbb{R}$

CE

$x-y = -(-x+y)$

$= -(y-x)$

$\frac{x^2-y^2}{3y-3x} = \frac{(x-y)(x+y)}{3(y-x)} = \frac{-\cancel{(y-x)}(x+y)}{3\cancel{(y-x)}} = \frac{-(x+y)}{3}$

CE $y-x \neq 0$

$-x \neq -y$

$\boxed{x \neq y}$

$\{\forall x, y \in \mathbb{R} \mid x \neq y\}$

$\frac{x\cdot x}{x}$

$\frac{y}{y\cdot y}$

$\frac{4x^2y}{8xy^2} = \frac{x}{2y}$

CE $8xy^2 \neq 0$

$x \neq 0$ et $y^2 \neq 0$

$x \neq 0$ et $y \neq 0$

$x; y \in \mathbb{R}_0$

Simplification de fractions- CE : exercices

Série 3. Simplifie les fractions (**NAM P 126 C** - AM P 132 série c)

$\dfrac{3a^2b}{5ab^3} = \dfrac{3a}{5b^2}$

$\neq 0$

CE : $a \neq 0$ et $b \neq 0$

$a, b \in \mathbb{R}_0$

$\dfrac{-5x}{4x^3} = \dfrac{-5}{4x^2}$

CE : $\cancel{x^3 \neq 0}$ $\boxed{x \neq 0}$

$\neq 0$

$\dfrac{0}{\neq 0} = 0$ $\dfrac{7}{\boxed{0}}$ ← $\neq 0$

$a^4 \cdot a^{-2} = a^2$

$\dfrac{-12a^4b^5}{16a^2b^3} \longrightarrow \dfrac{7}{\boxed{x}} \neq 0$

$= \dfrac{-3a^2b^2}{4}$ ou $-\dfrac{3}{4}a^2b^2$

$16a^2b^3 \neq 0$

$a^2 \neq 0$ et $b^3 \neq 0$

$\neq 0$

$a \neq 0$ et $b \neq 0$

$\dfrac{25xy^3z^2}{15xyz^3} \longrightarrow = \dfrac{5y^2}{3z}$

CE : $x; y; z \in \mathbb{R}_0$

$\dfrac{ab^3}{a^3b} = \dfrac{b^2}{a^2}$

$\dfrac{15}{15} = 1$

CE : $a, b \in \mathbb{R}_0$

yes!

$\dfrac{5\cancel{(a+b)}}{3\cancel{(a+b)}} = \dfrac{5}{3}$

CE : $a + b \neq 0$

$\boxed{a \neq -b}$

$\dfrac{-12x^2\cancel{(x+y)}}{15x\cancel{(x+y)}} = \dfrac{-4x}{5}$ ~~ou~~ ou $= -\dfrac{4}{5}x$

$x + y \neq 0$

$x \neq -y$

Simplification de fractions- CE : exercices

Posons que les den ≠ 0

$\frac{3(a-b)}{5(b-a)} = \frac{-3\cdot\cancel{(b-a)}}{5\cdot\cancel{(b-a)}} = -\frac{3}{5}$

CE $b \neq a$

$\{\forall a, b \in \mathbb{R} \mid b \neq a\}$

$\frac{(x+y)(2a-b)}{(3x-y)(2a-b)} = \frac{x+y}{3x-y}$

$3x - y \neq 0$ et $2a - b \neq 0$

$\to 3x \neq y$ et $2a \neq b$

$\to x \neq \frac{y}{3}$ et $a \neq \frac{b}{2}$

$\frac{(2y-3x)(x-y)}{5x(y-x)} = -\frac{(2y-3x)\cancel{(y-x)}}{5x\cancel{(y-x)}} = \frac{-(2y-3x)}{5x}$ ou $= \frac{3x-2y}{5x}$

① PAS

$5x \neq 0$ et $y - x \neq 0$; $-x \neq -y$

$x \neq 0$ et $x \neq y$

$3x - 6$

$\frac{3x-6}{x^2-4} = \frac{3\cdot\cancel{(x-2)}}{(x+2)\cancel{(x-2)}} = \frac{3}{(x+2)}$

CE : $x + 2 \neq 0$ et $x - 2 \neq 0$

$x \neq -2$ et $x \neq 2$

$x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$

$\frac{2a+6}{4a+12} = \frac{\cancel{2}\cancel{(a+3)}}{\cancel{2}\cdot 2\cancel{(a+3)}} = \frac{1}{2}$

$\neq 0$

CE : $a + 3 \neq 0$

$a \neq -3$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

Simplification de fractions- CE : exercices

$$\frac{ax-bx}{a^2-b^2} = \frac{x\cancel{(a-b)}}{(a+b)\cancel{(a-b)}} = \frac{x}{a+b}$$

CE : $a+b \neq 0$ et $a-b \neq 0$

$a \neq -b$ et $a \neq b$.

⚠ $\boxed{(a-b)^2 = (b-a)^2}$

$$\frac{a^2-6a+9}{a^2-9} = \frac{(a-3)^2}{(a+3)\cancel{(a-3)}} = \frac{a-3}{a+3}$$ ⚠

CE : $a+3 \neq 0$ et $a-3 \neq 0$

$a \neq -3$ et $a \neq 3$.

$a \in \mathbb{R} \setminus \{-3;3\}$

$$\frac{4a-4b}{5b-5a} = \frac{4(a-b)}{5(b-a)} = \frac{4\cancel{(a-b)}}{-5\cancel{(a-b)}} = \boxed{-\frac{4}{5}}$$

CE $b-a \neq 0$

$\boxed{b \neq a}$

$$\frac{3x^2-3}{4+4x} = \frac{3(x^2-1)}{4(1+x)} = \frac{3\cancel{(x+1)}(x-1)}{4\cancel{(x+1)}} = \frac{3(x-1)}{4} = \frac{3}{4}(x-1)$$

CE : $1+x \neq 0$

$x \neq -1$ $\quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$\frac{x^2-25}{25-5x} = \frac{(x+5)(x-5)}{5(5-x)} = \frac{-(x+5)\cancel{(5-x)}}{\cancel{(5-x)}} = -(x+5)$$

$5-x \neq 0$

$-x \neq -5$

$\boxed{x \neq 5}$

$$\frac{3a^2-ab}{6ab-2b^2} = \frac{a\cancel{(3a-b)}}{2b\cancel{(3a-b)}} = \frac{a}{2b}$$

$\boxed{b \neq 0}$ et $3a-b \neq 0$

$\boxed{3a \neq b}$

$a \neq \frac{b}{3}$

Simplification de fractions- CE : exercices

$$\frac{4a^2(a^2-b^2)}{3a^2+3ab} = \frac{4a^{\cancel{2}}\cancel{(a+b)}(a-b)}{3\cancel{a}\cancel{(a+b)}} = \frac{4a(a-b)}{3}$$

$\neq 0$

CE : $a \neq 0$ et $a+b \neq 0$

$a \neq -b$

$\boxed{0 \neq a \neq -b}$

$$\frac{3x+6}{x^2-2x} = \frac{3(x+2)}{x(x-2)}$$

CE : $\boxed{x \neq 0}$ et $x-2 \neq 0$

$\boxed{x \neq 2}$

$$\frac{3x^2+12x+12}{x^2+5x+6} = \frac{3(x^2+4x+4)}{x^2+5x+6} = \frac{3(x+2)^2}{(x+2)(x+3)}$$

$2 \cdot 3$

CE : $\boxed{x \neq -2 \text{ et } x \neq -3}$

$$= \frac{3(x+2)}{(x+3)}$$

$$\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+3x+2} = \frac{(x^3+2x^2)-(x+2)}{D}$$

S P

2 1 $\quad = \dfrac{x^2(x+2)-(x+2)\cdot 1}{D}$

-2 -1 $\quad = \dfrac{(x+2)(x^2-1)}{D}$

$$= \frac{(x+2)(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+2)}$$

-2
-1
+1

$$= x-1$$

D. Opérations sur les fractions rationnelles

1) Réduction au même dénominateur (AM P 254)

a) **Méthode** : pour réduire des fractions rationnelles au même dénominateur, il faut :

- **Factoriser** les polynômes des deux termes de la fraction (et indiquer les CE.)
- **Simplifier**, si possible, les **facteurs communs** d'une même fraction rationnelle.
- Déterminer le **dénominateur commun** qui est le **PPCM** des dénominateurs (il s'obtient en multipliant tous les facteurs communs ou non, chacun d'eux affecté de son plus grand exposant)
- Multiplier le numérateur et le dénominateur de chaque fraction par les facteurs qui permettent d'obtenir le dénominateur commun.

b) **Exemples**

$\frac{2}{9b^2}$ et $\frac{5}{6b^5}$	$\frac{a}{a^2-b^2}$ et $\frac{a}{5a-5b}$	$\frac{3}{a-2}$ et $\frac{a-5}{a^2-4a+4}$
$\frac{2.2b^3}{9b^2.2b^3}$ et $\frac{5.3}{6b^5.\ 3}$	$\frac{a}{(a-b)(a+b)}$ et $\frac{a}{5(a-b)}$	$\frac{3}{(a-2)}$ et $\frac{(a-5)}{(a-2)^2}$
$\frac{4b^3}{18b^5}$ et $\frac{15}{18b^5}$	$\frac{5.a}{5\ .(a-b)(a+b)}$ et $\frac{a\ (a+b)}{5(a-b)(a+b)}$	$\frac{3.\ (a-2)}{(a-2)^2}$ et $\frac{(a-5)}{(a-2)^2}$

$\frac{1}{2a}+\frac{1}{3a}=\frac{}{6a}$ $\qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2.3}$

c) **Remarque:**

Ce n'est généralement pas une bonne idée d'effectuer la multiplication des binômes au dénominateur. La plupart du temps, il est plus avantageux de laisser le dénominateur sous la forme d'un produit, parce qu'ainsi, on peut plus facilement effectuer d'autres simplifications par la suite.

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{}{a.b}$

d) **Exercices** Recherche du dénominateur commun

	PPCM		PPCM		PPCM
a et b	$a.b$	a^2 et a^5	a^5	$\frac{2}{x^2}$ et $\frac{5}{x}$	
2a et 3a	$6a$	x et x^3	x^3	$\frac{3a}{x^3}$ et $\frac{2b}{x^2}$	
xy et yz	xyz	3 a^2 et 9a	$9a^2$	$\frac{2x}{x+3}$ et $\frac{3x}{x+5}$	
10 x et 15 y	$30xy$	6 a^4 et 15 a^3	$30a^4$	$\frac{2}{x}$ et $\frac{5}{x+3}$	

Factorise le dénominateur. Détermine le dénominateur commun et réduits les fractions au même D
$\frac{2}{x^2-4}$ et $\frac{3x}{2x+4}$
$\frac{a}{a^2-2ab+b^2}$ et $\frac{b}{a-b}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{}{8}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}=\frac{1}{2^3}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{\quad}{6}$ $\frac{1}{5}+\frac{1}{25}$

2) Addition et soustraction de fractions rationnelles

a) **Méthode** : pour additionner ou soustraire des fractions algébriques, il faut :

- Factoriser les dénominateurs quand ceux-ci sont des sommes algébriques
- Trouver le ppcm des dénominateurs
- Mettre les fractions au même dénominateur
- Additionner ou soustraire les numérateurs en conservant le dénominateur.
- Distribuer au numérateur et réduire les termes semblables
- si possible, factoriser le numérateur et/ou simplifier.

Remarque :

Ce n'est généralement pas une bonne idée d'effectuer la multiplication des binômes au dénominateur.
La plupart du temps, il est plus avantageux de laisser le dénominateur sous la forme d'un produit, parce qu'ainsi, on peut plus facilement effectuer d'autres simplifications par la suite

b) Exemples

♥ Exemple 1

$$\frac{5a}{a^2-9}+\frac{a^2}{3a-9}=\frac{5a}{(a-3)(a+3)}+\frac{a^2}{3(a-3)}$$ *Factoriser les dénominateurs*

$$=\frac{5a}{(a-3)(a+3)}*\frac{3}{3}+\frac{a^2}{3(a-3)}*\frac{(a+3)}{(a+3)}$$ *Mettre les fractions au même dénominateur*

$$=\frac{15a}{3(a-3)(a+3)}+\frac{a^2(a+3)}{3(a-3)(a+3)}$$

$$=\frac{15a+a^2(a+3)}{3(a-3)(a+3)}$$ *Additionner les numérateurs en conservant le dénominateur.*

$$=\frac{15a+a^3+3a^2}{3(a-3)(a+3)}$$ *Distribuer au numérateur et réduire les termes semblables*

$$=\frac{a(15+a^2+3a)}{3(a-3)(a+3)}$$ *Si possible, factoriser le numérateur et/ou simplifier*

♥ Exemple 2 : les dénominateurs sont opposés

$$\frac{5x}{x-3}-\frac{7x}{3-x}=\frac{5x}{x-3}-\frac{-7x}{-(3-x)}$$ *Mettre les fractions au même dénominateur*

$$=\frac{5x}{x-3}-\frac{-7x}{x-3}$$

$$=\frac{5x+7x}{x-3}$$ *Additionner les numérateurs en conservant le dénominateur.*

$$=\frac{12x}{x-3}$$ *Réduire les termes semblables*

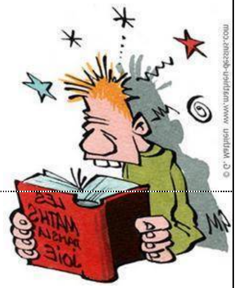
c) Exercices : (AM P P 133 exercice B)

Addition et soustraction de fractions algébriques (Actimath P 133 exercice B/ NAM p 128 exercice a)

Première colonne	Deuxième colonne
$\frac{3a}{2}+\frac{a}{5}$	$\frac{5}{2a}+\frac{4}{3a}$
$\frac{5x}{8}-\frac{3x}{4}$	$\frac{3}{xy}-\frac{2}{yz}$
$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}$	$\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{3a}$
$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}$	$\frac{3}{a}+\frac{5}{a^2}$
$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$	$\frac{5}{3x^2}-\frac{1}{2x}$

Troisième colonne (5ème colonne dans NAM)	Quatrième colonne (3ème colonne dans NAM)
$\frac{a+3}{2}+\frac{a-4}{3}$	$\frac{3}{5x^3}-\frac{2}{x}-2$
$\frac{x+2}{4}-\frac{3x-1}{5}$	$\frac{4}{5b^2}+\frac{3}{10b^3}-\frac{1}{12b}$
$\frac{a+b}{b}+\frac{a-b}{a}$	$\frac{2}{a^4}-\frac{5}{a^2}+3$
$\frac{x-2y}{x}-\frac{2x+y}{y}$	$\frac{5}{a^2b}-\frac{2}{ab^2}$
$\frac{a-3}{a}-\frac{a+4}{2a}$	$\frac{2}{a^2b^3}+\frac{3}{5a^5b^2}$

Cinquième colonne (4ème colonne dans NAM)
$\frac{5}{4a^3b^2}-\frac{7}{6ab^5}$
$\frac{5}{2a^3b}+\frac{1}{4a^6b^3}$
$\frac{2x}{15y^2}-\frac{3y}{5x^2}+\frac{1}{3xy}$
$\frac{5}{6a^3}+\frac{a}{6}-\frac{1}{4a}$
$\frac{2}{3ab^3}+\frac{2}{5a^3b}+2$



sixième colonne

$$\frac{5}{a \cdot (a+b)} - \frac{2}{b \cdot (a+b)}$$

$$\frac{2x}{(x-2) \cdot (x+3)} + \frac{3x}{(x-2) \cdot (x+4)}$$

$$\frac{-5}{(a+b)^2} + \frac{a-b}{a+b}$$

$$\frac{5}{(a-3) \cdot (a+3)} - \frac{1}{2 \cdot (a-3)^2}$$

$$\frac{x^3}{(x+y)^3} + \frac{x^2+y^2}{3 \cdot (x+y)^2} - \frac{3}{2 \cdot (x+y)}$$

Septième colonne

$$\frac{4}{a-3} + \frac{5}{a-2}$$

$$\frac{5}{x+y} + \frac{2}{x}$$

$$\frac{a}{a+b} - \frac{b}{a-b}$$

$$\frac{2}{x+y} - \frac{2x}{x^2-y^2}$$

$$\frac{3}{a^2+ab} + \frac{2}{ab+b^2}$$

Huitième colonne

$$\frac{5}{x-2} - 3x$$

$$2x + \frac{5x}{x-5}$$

$$\frac{2-x}{7} - 5x$$

$$\frac{7}{2-x} - 5x$$

$$x - \frac{3}{4-x}$$

Neuvième colonne

$$\frac{2x}{x^2-4} - \frac{5}{x+2}$$

$$\frac{5}{4a-2b} - \frac{2}{4a^2-b^2}$$

$$\frac{2a}{a-1} - \frac{4a}{1-a}$$

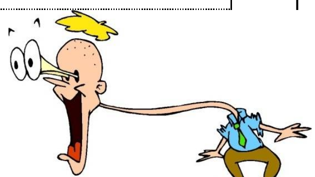
$$\frac{2}{x-3} - \frac{x}{9-x^2}$$

$$\frac{5x^2}{x^3+1} + \frac{4x}{x^2-1}$$

Dixième colonne (NAM page 129 série B colonne 5)

$$\frac{3}{a-b} - \frac{5}{a+b} + \frac{1}{a^2-b^2}$$

$$\frac{x}{2x-4} + \frac{3}{x^2-4} - \frac{x}{x-2}$$



$$\frac{3x}{x^2-4} - \frac{4x}{2x^2-x-6}$$

$$\frac{3x}{x^2-4} - \frac{4x}{2x^2-x-6}$$

$$\frac{3x}{x^2-4x+4} - \frac{5}{2-x} + \frac{1}{x+2}$$

3) Multiplication de fractions algébriques

a) Méthode

- Factoriser numérateurs et dénominateurs quand ceux-ci sont des sommes algébriques
- Multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux .
- si possible, simplifier la fraction obtenue.

b) Exemples résolus (Am p ....)

$$\frac{4a}{5c} \cdot \frac{15c}{ab} = \frac{60ac}{5abc} = \frac{12}{b}$$

$$\frac{a-2b}{x} \cdot \frac{x^2}{a^2-4b^2} = \frac{(a-2b) \cdot x^2}{x \cdot (a^2-4b^2)}$$

$$= \frac{x^2 \cdot (a-2b)}{x \cdot (a-2b) \cdot (a+2b)}$$

$$= \frac{x}{a+2b}$$

$$\frac{9x^2-4}{x^2-1} \cdot \frac{x-1}{2x-3x^2} = \frac{(3x-2) \cdot (3x+2) \cdot (x-1)}{(x-1) \cdot (x+1) \cdot x \cdot (2-3x)}$$

$$= \frac{-(3x-2) \cdot (3x+2) \cdot (x-1)}{(x-1) \cdot (x+1) \cdot x \cdot (-2+3x)}$$

$$= \frac{-(3x+2)}{x \cdot (x+1)}$$

$$\frac{x-5}{x^2+x-6} \cdot \frac{x^2-4x+4}{2} \cdot \frac{x+3}{x-5} =$$

factorisation de « $x^2 + x - 6$ ».

A l'aide de la loi du reste,

on vérifie si ce polynôme est divisible par $(x+1)$, $(x-1)$, $(x+2)$,$(x-2)$, etc.

On trouve qu'il est divisible par $(x-2)$.

Avec Horner, on factorise facilement : $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$

factorisation de « $x^2 - 4x + 4$ »

« $x^2 - 4x + 4$ » est un produit remarquable et est égal à $(x-2)^2$

on peut donc écrire le produit :

$$\frac{x-5}{x^2+x-6} \cdot \frac{x^2-4x+4}{2} \cdot \frac{x+3}{x-5} = \frac{x-5}{(x-2)(x+3)} \cdot \frac{(x-2)^2}{2} \cdot \frac{x+3}{x-5} = \frac{x-2}{2}$$

Remarque : il y a avantage à factoriser les polynômes intervenant dans un produit de fractions pour pouvoir ensuite simplifier le résultat.

c) Exercices (Am p 134-135 exercice C)

d) **Exercices** Actimath P 134-135 exercice C

Première colonne	Deuxième colonne
$\frac{3a}{b} \cdot \frac{5b}{2a}$	$\frac{x+y}{3} \cdot \frac{5}{x+y}$
$\frac{-2x}{5yz} \cdot \frac{-5y}{6x}$	$\frac{x-y}{2} \cdot \frac{5}{y-x}$
$\frac{3a^2b}{5x} \cdot \frac{15x^3}{ab^4}$	$\frac{x^2-4}{3} \cdot \frac{5}{4x-8}$
$\frac{-7a^3}{2b} \cdot \frac{-6b^3}{5a} \cdot \frac{-10a}{9b^2}$	$\frac{1+x}{x} \cdot \frac{3x^2}{x^2+2x+1}$

Troisième colonne

$$5x^3 \cdot \frac{25x^2-4}{10x-25x^2}$$

$$\frac{2-4a}{4a^2-1} \cdot \frac{1-2a}{a^2-4a+4}$$

$$\frac{(a-b)^2}{b^2-4a^2} \cdot \frac{b^2-4ab+4a^2}{b^2-a^2}$$

$$\frac{x^2-3x-40}{x^2-x-6} \cdot \frac{x-3}{x+5}$$

Quatrième colonne

$$\frac{a^2-9}{4a+10} \cdot \frac{4a}{a^2-6a+9}$$

$$\frac{1}{2a^2-8} \cdot (2a^2-4a)$$

$$\frac{x^2+3x+2}{2-x} \cdot \frac{x^2-4}{x^2+x}$$

$$\frac{x^2-9}{x+2} \cdot \frac{2x+4}{x^3-3x^2-x+3}$$

4) Division de fractions rationnelles (NAM P 294 :AM P 254)

a) Méthode

> Pour diviser une fraction par une fraction (non nulle),
>
> on multiplie la première fraction par l'inverse de la seconde.

b) Exemples résolus (NAm p 294)

$$\frac{4a}{5b} : \frac{2a}{3b} = \frac{4a}{5b} \cdot \frac{3b}{2a} = \frac{4a \cdot 3b}{5b \cdot 2a} = \frac{12ab}{10ab} = \frac{6}{5}$$

$$\begin{aligned}
\frac{a+b}{4a} : \frac{a^2-b^2}{2a} &= \frac{a+b}{4a} \cdot \frac{2a}{a^2-b^2} \\
&= \frac{(a+b) \cdot 2a}{4a \cdot (a^2-b^2)} \\
&= \frac{2a \cdot (a+b)}{4a \cdot (a+b) \cdot (a-b)} \\
&= \frac{1}{2 \cdot (a-b)}
\end{aligned}$$

c) Exemples résolus (Am p …….)

Actimath P 134-135 exercice C

Division de fractions algébriques (Actimath P 135 exercice D)

Première colonne	Deuxième colonne
$\dfrac{x}{2y} : \dfrac{3x}{4}$	$\dfrac{15x}{7} : 3$
$\dfrac{-5}{7a} : \dfrac{10}{2a^2}$	$\dfrac{5x}{3} : 2$
$\dfrac{1}{a^3} : \dfrac{1}{a}$	$\dfrac{24ab}{5} : 3a$
$\dfrac{4a^3b}{c^4} : \dfrac{6ab^2}{c}$	$\dfrac{10}{x} : x$
$\dfrac{-2a^2x}{5b^5y} : \dfrac{-6x^2}{ay^2}$	$\dfrac{10x^2}{7} : x$

Troisième colonne
$\dfrac{3a-3}{a-2} : \dfrac{a^2-1}{3a-6}$
$\dfrac{2a-b}{4a^2} : \dfrac{b^2-4a^2}{6a}$
$\dfrac{2x^2-xy}{a+b} : \dfrac{x}{a^2-b^2}$
$(9a^2-6a+1) : \dfrac{6a^2-2a}{3a+1}$
$\dfrac{4-4x}{8} : (x^2-1)$

Quatrième colonne
$\dfrac{a^3-b^3}{6a-3b} : \dfrac{a^2+ab+b^2}{4a^2-b^2}$
$\dfrac{2x^2-9x+4}{2x-2} : \dfrac{16-x^2}{x^2-x}$

Cinquième colonne
$\dfrac{\dfrac{a+2}{b^2-9}}{\dfrac{a^2-4}{b+3}}$
$\dfrac{\dfrac{x^2-4}{x-2}}{x+2}$
$\dfrac{\dfrac{-4x^3}{2a^2-50}}{\dfrac{6x}{2a-10}}$
$\dfrac{3x-6y}{\dfrac{4y^2-x^2}{3}}$
$\dfrac{x^2-4}{\dfrac{x-2}{x+2}}$

Mélangeons ! (Actimath P 136 E)

$ab \cdot \left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)$
$\dfrac{1-\dfrac{1}{a}}{a^2-1}$
$\left(\dfrac{1}{a-1}+\dfrac{1}{a+1}\right) \cdot \dfrac{a^2-1}{2a}$
$\dfrac{3a}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}}$
$\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}}$
$\left(\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{a^2}\right) : \left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}\right)$

E. Equations fractionnaires

1) Notions (AM P 253)

> Une équation fractionnaire est une équation où l'inconnue apparaît au dénominateur.
>
> Avant de la résoudre, il faut déterminer la condition d'existence de chaque fraction.
>
> Pour résoudre l'équation, on réduit les deux membres au même dénominateur et on les multiplie par ce dénominateur non nul.
>
> Certaines solutions de l'équation ainsi trouvées peuvent ne pas être solutions de l'équation donnée car elles ne satisfont pas aux conditions d'existence.

2) Exemples (AM P 253)

$$\frac{x}{x+3} - \frac{x}{x-3} = \frac{18}{x^2-9}$$

Conditions d'existence :

$$x+3 \neq 0 \quad \text{et} \quad x-3 \neq 0$$

$$x \neq -3 \quad \text{et} \quad x \neq 3$$

$$\frac{x}{x+3} - \frac{x}{x-3} = \frac{18}{(x+3)\cdot(x-3)}$$

$$\frac{x\cdot(x-3) - x\cdot(x+3)}{(x+3)\cdot(x-3)} = \frac{18}{(x+3)\cdot(x-3)}$$

$$x\cdot(x-3) - x\cdot(x+3) = 18$$

$$x^2 - 3x - x^2 - 3x = 18$$

$$-6x = 18$$

$$x = -3$$

Cette solution est à rejeter en vertu des conditions d'existence.

L'équation n'admet pas de solution.

$$\frac{4}{x} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{x^2}{x^2+x}$$

Conditions d'existence

$$x \neq 0 \quad \text{et} \quad x+1 \neq 0$$

$$x \neq -1$$

$$\frac{4}{x} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{x^2}{x\cdot(x+1)}$$

$$\frac{4\cdot(x+1) + x\cdot(x-1)}{x\cdot(x+1)} = \frac{x^2}{x\cdot(x+1)}$$

$$4x + 4 + x^2 - x = x^2$$

$$4x + 4 + x^2 - x - x^2 = 0$$

$$3x + 4 = 0$$

$$3x = -4$$

$$x = -\frac{4}{3}$$

La solution de l'équation est $-\frac{4}{3}$.

$$\frac{x-2}{x} + \frac{4}{x-2} = \frac{8}{x^2-2x}$$

Conditions d'existence :

$$x \neq 0 \quad \text{et} \quad x-2 \neq 0$$

$$x \neq 2$$

$$\frac{x-2}{x} + \frac{4}{x-2} = \frac{8}{x\cdot(x-2)}$$

$$\frac{(x-2)^2 + 4x}{x\cdot(x-2)} = \frac{8}{x\cdot(x-2)}$$

$$(x-2)^2 + 4x = 8$$

$$x^2 - 4x + 4 + 4x - 8 = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$(x+2)\cdot(x-2) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x+2=0 \quad \text{ou} \quad x-2=0$$

$$x=-2 \quad \text{ou} \quad x=2$$

Cette solution est à rejeter en vertu des conditions d'existence.

La solution de l'équation est – 2.

1) Exercices (AM P 253) résous les équations suivantes

$\frac{5}{x} = \frac{3}{2}$	$\frac{3}{x} + \frac{2}{x+1} = \frac{1}{x}$	$\frac{x}{3} = \frac{12}{x}$
$\frac{-3}{4} = \frac{2}{x}$	$\frac{4}{x} - \frac{x}{x-1} = \frac{x^2}{x^2-x}$	$\frac{-1}{x} = \frac{-x}{4}$
$\frac{2}{x-4} = \frac{4}{5}$	$\frac{2x-1}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{2x^2}{x^2-1}$	$\frac{2}{x+1} = \frac{x+4}{2}$
$\frac{3}{x-1} = \frac{2}{2-3x}$	$\frac{2x+1}{1-x} = \frac{1-2x}{3+x}$	$\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{-x^2}{x^2-x}$
$\frac{3}{x+2} = \frac{2}{x+1}$	$\frac{x}{x+4} + \frac{x}{4-x} = \frac{1}{x^2-16}$	$\frac{2}{x^2-2x+1} - \frac{2}{1-x} = \frac{x^2}{x+1}$

b) Dans chacune des formules suivantes, exprime chaque variable en fonction des autres.

$S = \dfrac{b \cdot h}{2}$ $\qquad S = \dfrac{(B + b) \cdot h}{2}$ $\qquad V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

$\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{d'}$ $\qquad F = g \cdot \dfrac{m \cdot m'}{d^2}$ $\qquad P = \dfrac{W}{t}$