Nom :	N°:
Prénom :	
Classe : 3A Date :	T

Fractions algébriques

Consignes :

1. Travail autocorrigé : le correctif sera sur le site deux jours après.
   http://physamath-cochez.be
2. N'hésite pas à t'aider des vidéos.
3. Idée : si tu as une tablette, tu peux télécharger le pdf et écrire directement sur le document.
4. Tu peux toujours me contacter par mail : catherine.cochez@aru2.be
5. Des remédiations sont proposées en visio-conférence sur teams. N'oublie pas d'accepter la réunion ;-) Il faut bien entendu avoir demandé l'accès à office 365.

1 Rappels en vidéo (ou voir sur le site http://physamath-cochez.be)

FRACTIONS ET CONDITION EXISTENCE

± 7min https://www.youtube.com/watch?v=3Loen56LaLo

± 13min https://www.youtube.com/watch?v=vvu8yXqkl5Y

SIMPLIFICATION

± 6min https://www.youtube.com/watch?v=wn4d4R8ISK8

MULTIPLICATION ET DIVISION

± 16min

https://www.youtube.com/watch?v=0D5KWLCW8M8

ADDITIONS ET SOUSTRACTIONS

± 10 min

https://www.youtube.com/watch?v=RevFWIe7XY0

EQUATIONS FRACTIONNAIRES

± 4min

https://www.youtube.com/watch?v=0D5KWLCW8M8

FACTORISATION SYNTHÈSE

± 4min

https://www.youtube.com/watch?v=vA4J37hoCcA

EQUATION PRODUIT NUL

https://www.youtube.com/watch?v=Pt55o3GNff4

Rappels de deuxième

Exercices extraits de croc'math connection via www.scoodle.be
code : PTKTEV5DXQJH96NC

2 FRACTIONS PARTICULIÈRES

2a **DÉTERMINE** le nombre entier que représente le ☺.

a) $\frac{☺}{7} = 0 \Rightarrow$ ☺ = ____ car ____________

b) $\frac{☺}{8} = 1 \Rightarrow$ ☺ = ____ car ____________

c) $\frac{-12}{☺} = -12 \Rightarrow$ ☺ = ____ car ____________

d) $\frac{-5}{☺} = 1 \Rightarrow$ ☺ = ____ car ____________

e) $\frac{-9}{☺} = -1 \Rightarrow$ ☺ = ____ car ____________

f) $\frac{☺}{1} = 19 \Rightarrow$ ☺ = ____ car ____________

g) $\frac{8}{0} =$ ☺ $\Rightarrow$ ☺ = ____ car ____________

____

h) $\frac{☺}{11} = -1 \Rightarrow$ ☺ = ____ car ____________

* n'existe pas

En t'aidant des différents panneaux de notre bande d'ados et de l'exploration, **COMPLÈTE** cette synthèse.

Une fraction est égale à 1 si ____________

____

Une fraction est égale à –1 si ____________

____

Une fraction est égale à 0 si ____________________

Une fraction est égale à son numérateur si ____________________

On ne peut pas diviser un nombre par ____________________

Le dénominateur d'une fraction doit donc toujours être ____________________

2b **DÉTERMINE** la valeur que représente la lettre *a* dans chacune des expressions suivantes.

a) $\frac{a}{4} = 1 \Rightarrow a =$ ________

b) $\frac{a}{-8} = -1 \Rightarrow a =$ ________

c) $\frac{a}{1} = 8 \Rightarrow a =$ ________

d) $\frac{8}{a} = \nexists \Rightarrow a =$ ________

e) $\frac{-11}{a} = -1 \Rightarrow a =$ ________

f) $\frac{a}{1} = -10 \Rightarrow a =$ ________

g) $\frac{a}{6} = 0 \Rightarrow a =$ ________

h) $\frac{-7}{a} = -1 \Rightarrow a =$ ________

i) $\frac{12}{a} = 0 \Rightarrow a =$ ________

2c **DÉTERMINE** l'entier que représente le nombre *x* et **VÉRIFIE** ta solution.

a) $\frac{x+2}{5} = 1$

Vérification : ____________________

b) $\frac{x+8}{9} = -1$

Vérification : ____________________

c) $\frac{2x+10}{5} = 0$

Vérification : ____________________

d) $\frac{12x+15}{1} = -57$

Vérification : ____________________

2d Dans les fractions suivantes, *x* peut prendre n'importe quelle valeur sauf une. Laquelle ?

a) $\frac{5}{x}$ CE : ________

b) $\frac{2x-5}{x+6}$ CE : ________

c) $\frac{2}{2x-6}$ CE : ________

d) $\frac{2}{x-4}$ CE : ________

e) $\frac{3}{2x}$ CE : ________

f) $\frac{12}{-5x+35}$ CE : ________

CE veut dire condition d'existence.

Opérations sur les rationnels

Addition de fractions

Pour **additionner** des fractions, il faut :

1) Rendre les dénominateurs positifs.
2) Simplifier les fractions, si possible.
3) Réduire au même dénominateur en cherchant le PPCM des dénominateurs.
4) Additionner les numérateurs tout en conservant le dénominateur commun.
5) Simplifier si possible le résultat obtenu.

Exemple :

$$\frac{24}{-40} + \frac{10}{30} = \frac{-24}{40} + \frac{10}{30} = \frac{-3}{5} + \frac{1}{3} = \frac{-9}{15} + \frac{5}{15} = \frac{-4}{15}$$

Multiplication de fractions

Pour **multiplier** des fractions, il faut :

1) Déterminer le signe du produit
   - Si le nombre de signes – est pair, la réponse est positive.
   - Si le nombre de signes – est impair, la réponse est négative.
2) Simplifier : n'importe quel numérateur avec n'importe quel dénominateur.
3) Multiplier : les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.
4) Vérifier que la fraction obtenue est bien irréductible.

Exemple :

$$\frac{28}{-18} \cdot \frac{24}{-7} = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{1} = \frac{16}{3}$$

Puissance d'une fraction

Pour **élever** une fraction à une puissance :

on élève chaque terme de la fraction à cette puissance.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}_0$ et $m \in \mathbb{Z}$

Exemple :

$$\left(\frac{-5}{3}\right)^2 = \frac{(-5)^2}{3^2} = \frac{25}{9}$$

Division de fractions

Diviser par une fraction revient à multiplier par l'inverse de cette fraction.

(Les dénominateurs doivent être différents de 0.)

Exemple :

$$\frac{\frac{2}{-7}}{\frac{5}{4}} = \frac{2}{-7} : \frac{5}{4} = \frac{2}{-7} \cdot \frac{4}{5} = \frac{-8}{35}$$

Quotient de puissances de même base

$a \in \mathbb{R}_0$ et $m, n \in \mathbb{Z}$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ si $m > n$

et $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$ si $n > m$

$\frac{a^m}{a^n} = 1$ si $m = n$

Exemples :

$\frac{3^5}{3^2} = 3^3 = 27$

$\frac{3^2}{3^5} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

$\frac{3^3}{3^3} = 1$

Opposé

Deux nombres sont **opposés** si leur somme vaut 0.

+ et – sont opposés,

tout comme et –

(Les dénominateurs doivent être différents de 0.)

Exemple :

$\frac{3}{4}$ et $\frac{-3}{4}$

sont opposés car

$$\frac{3}{4} + \frac{-3}{4} = 0$$

Inverse

Deux nombres sont **inverses** si leur produit vaut 1.

et $\frac{1}{\ }$ sont inverses,

tout comme et

(Les dénominateurs doivent être différents de 0.)

Exemple :

$\frac{-7}{4}$ et $\frac{-4}{7}$

sont inverses car

$$\frac{-7}{4} \cdot \frac{-4}{7} = 1$$

Retiens que 0 n'a pas d'inverse.

3 Fractions algébriques

Le dossier t'est envoyé par teams.

Il se trouve également sur le site http://physamath-cochez.be en algèbre – Fractions. Une carte mentale y est jointe.

A bientôt dans teams pour corriger tout cela ;-)

LET'S GO

BON TRAVAIL

Ch 9 Fractions algébriques

A. Définitions et vocabulaire : rappels (NAP P290 - AM P 253 partie A)

- Tous les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme de fractions à termes entiers sont des nombres rationnels.
- L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$
- L'écriture $\frac{a}{b}$ est l'écriture d'une fraction où a est le **Numérateur**

  b est le **Dénominateur différent de zéro**

  a et b sont les **TERMES** de la fraction

- Une fraction **algébrique** ou **rationnelle** est une expression algébrique fractionnaire dont les termes sont des polynômes.

Une fraction algébrique est aussi une division non exécutée, avec la différence que le diviseur et le dividende sont ici des expressions littérales.

Exemples : $\frac{x^2-4x+4}{x-3}$, $\frac{x+5}{x-2}$, $\frac{x+5}{x-\sqrt{2}}$ et $\frac{5}{a^2-9}$ **sont** des fractions rationnelles

$\frac{x+5}{\sqrt{x}}$ n'est **pas** une fraction rationnelle

B. Conditions d'existence (NAP P290 - AM P 253 partie B)

1) Notions

Pour qu'une fraction existe c'est-à-dire désigne un réel,
son **dénominateur** doit être **différent** de **zéro**.
Cette condition est appelée **condition d'existence** de la fraction.

2) Méthode :

- Ecrire le polynôme « dénominateur » et de ne **pas** l'égaler à zéro ;
- Résoudre l'équation ainsi formée ;
- Ecrire les conditions d'existence **en excluant** les valeurs trouvées dans la résolution de l'équation.

3) Exemples :

- La fraction $\frac{x^2-4x+4}{x-3}$ **existe** c'est-à-dire ne représente un nombre réel que

  $\Leftrightarrow$ (si et seulement si) son **dénominateur** n'est **pas nul**

  $\Leftrightarrow \quad x-3 \neq 0$

  $\Leftrightarrow \quad x \neq 3 \qquad\qquad x \in \Re \setminus \{\ 3\ \}$

La condition d'existence de $\frac{x^2-4x+4}{x-3}$ est $x \neq 3$

Nous noterons CE pour désigner la condition d'existence.

- La fraction $\dfrac{4}{t^2-9}$ existe si $t \neq 3$ et $t \neq -3$

  En effet $t^2 - 9 \neq 0$

  $\Leftrightarrow (t-3)(t+3) \neq 0$

  $\Leftrightarrow (t-3) \neq 0$ ***et*** $(t+3) \neq 0$

  $\Leftrightarrow t \neq 3$ ***et*** $t \neq -3$ $\qquad t \in \Re \setminus \{-3 ; 3\}$

  Les conditions d'existence de $\dfrac{4}{t^2-9}$ sont $t \neq 3$ et $t \neq -3$

4) Exercices : Détermine les conditions d'existence (CE) de chacune des fractions suivantes

Série 1.

$\dfrac{1}{a-2}$

$\dfrac{4}{t^2-4}$

$\dfrac{3a+3b}{3a-3b}$

$\dfrac{6}{(x-1)(x-3)}$

$\dfrac{x-4}{x^2+5x+6}$

$\dfrac{x^2-5}{x^3-x^2}$

Conditions existence d'une fraction: exercices

Série 2. NAM P 125 n°C (AM P131 n°C)

$$\frac{3x}{x+5}$$

$$\frac{-2c}{3c-1}$$

$$\frac{5a+2}{7}$$

$$\frac{b-4}{b(b+4)}$$

$$\frac{3x-2}{x^3-2x-2}$$

$$\frac{5a+1}{a^2-9}$$

$$\frac{-7}{x^2+x}$$

$$\frac{y^2-1}{2y^3-8y}$$

Conditions existence d'une fraction: exercices

$$\frac{4x}{x^2-2x+1}$$

$$\frac{-x+1}{x^3+3x^2+2x+6}$$

$$\frac{5}{ab}$$

$$\frac{3a}{b-c}$$

$$\frac{-1}{a+b}$$

$$\frac{5}{x^2-y^2}$$

$$\frac{2a}{6a-3b}$$

C. Simplification

1) Notions (NAM P290-291 - AM P 253 c)

On peut multiplier ou diviser les deux termes d'une fraction par un même nombre non nul,

on obtient une fraction équivalente ($\equiv$égale). avec a $\in \Re$ et b, c , m$\in \Re_0$

$$\frac{a.\cancel{m}}{b.\cancel{m}} = \frac{a}{b} \qquad \frac{a.m+b.m}{c.m} = \frac{\cancel{m}.(a+b)}{c.\cancel{m}} = \frac{a+b}{c} \qquad \frac{\cancel{2}.a}{\cancel{2}.b} = \frac{a}{b}$$

D'abord FACTORISER
avant de simplifier.

Simplifier une fraction rationnelle,

c'est diviser les deux termes de cette fraction par un même polynôme **non nul.**

2) Méthode pour simplifier une fraction algébrique (NAM P 290 - AM P 253)

Pour factoriser une fraction rationnelle, il faut :

- **Factoriser** les polynômes des deux termes de la fraction ;
- Énoncer les conditions d'existence (CE) de cette fraction ;
- **Diviser** les deux termes de la fraction **par un même polynôme non nul** ;
- Enoncer les conditions de simplification (CS)

3) Conditions de simplification (NAM P 291 - AM P 254)

Les valeurs qui annulent le polynôme par lequel on divise les deux termes de la fraction rationnelle s'appellent les **conditions de simplification** (notées CS).

La condition d'existence d'une fraction n'est pas toujours identique à celle de sa forme simplifiée

Exemple :

$$\frac{x^2-9}{x^2-3x} = \frac{(\cancel{x-3})(x+3)}{x(\cancel{x-3})} = \frac{x+3}{x}$$

CE : $x^2 - 3x \neq 0$
$x(x-3) \neq 0$
$x \neq 0$ et $(x-3) \neq 0$
$x \neq 0$ et $x \neq 3$
$0 \neq x \neq 3$

CS : $x - 3 \neq 0$
$x \neq 3$

CE : $x \neq 0$

La condition de simplification précise que l'égalité n'est vraie que pour $x \neq 3$.

4) Remarque

Après factorisation du numérateur et/ou du dénominateur, il arrive parfois qu'un facteur du numérateur soit **l'opposé** d'un facteur du dénominateur. Voici comment les rendre **égaux**.

Exemple : $\frac{6-4x}{4x^2-9} = \frac{2(3-2x)}{(2x+3)(2x-3)} = \frac{-2(3-2x)}{(2x+3)(-2x+3)} = \frac{-2(\cancel{3-2x})}{(2x+3)(\cancel{3-2x})} = \frac{-2}{(2x+3)}$

. (-1)

. (-1)

Simplification de fractions- CE : exercices

5) Exercices

Série 1. Factoriser ou ne pas factoriser ? Simplifier ou ne pas simplifier ?

Coche (...x...) les exercices pour lesquels tu ne peux factoriser ni le numérateur, ni le dénominateur.
Pour les exercices non cochés, factorise, puis simplifie si cela est possible. Sinon, recopie la fraction telle quelle.

	$\frac{12x^2y}{18xy^4}$
	$\frac{4x-2}{2x}$
	$\frac{8ab}{8ab-1}$
	$\frac{3x-6}{2x+4}$
	$\frac{-8ab}{8abc}$

Simplification de fractions- CE : exercices

	$\frac{-x^2y^2}{xy}$	
	$\frac{x^2-y^2}{x-y}$	
	$\frac{5x}{25x^2}$	
	$\frac{5-x}{25-x^2}$	
	$\frac{x^2-4y^2}{x-y}$	

Simplification de fractions- CE : exercices

<u>Série 2.</u> Associe à chaque fraction sa forme simplifiée. (AM P 134)

$\dfrac{x^2 - x}{2x - 2} =$	○	○	$\dfrac{2x}{3x-1}$
$\dfrac{4x}{6x - 2} =$	○	○	$\dfrac{x+y}{3}$
$\dfrac{x^2 - y^2}{3x + 3y} =$	○	○	$\dfrac{-(x+y)}{3}$
$\dfrac{2x + 2y}{6} =$	○	○	$\dfrac{x}{2y}$
$\dfrac{x^2 - y^2}{3y - 3x} =$	○	○	$\dfrac{x-y}{3}$
$\dfrac{4x^2 y}{8xy^2} =$	○	○	$\dfrac{x}{2}$

Simplification de fractions- CE : exercices

Série 3. Simplifie les fractions (**NAM P 126 C** - AM P 132 série c)

1

$$\frac{3a^2b}{5ab^3}$$

2

$$\frac{-5x}{4x^3}$$

$$\frac{-12a^4b^5}{16a^2b^3}$$

$$\frac{25xy^3z^2}{15xyz^3}$$

$$\frac{ab^3}{a^3b}$$

2

$$\frac{5(a+b)}{3(a+b)}$$

$$\frac{-12x^2(x+y)}{15x(x+y)}$$

$$\frac{3(a-b)}{5(b-a)}$$

$$\frac{(x+y)(2a-b)}{(3x-y)(2a-b)}$$

$$\frac{(2y-3x)(x-y)}{5x(y-x)}$$

3

$$\frac{3x-6}{x^2-4}$$

$$\frac{2a+6}{4a+12}$$

Simplification de fractions- CE : exercices

$$\frac{ax-bx}{a^2-b^2}$$

$$\frac{a^2-6a+9}{a^2-9}$$

$$\frac{4a-4b}{5b-5a}$$

$$\frac{3x^2-3}{4+4x}$$

$$\frac{x^2-25}{25-5x}$$

$$\frac{3a^2-ab}{6ab-2b^2}$$

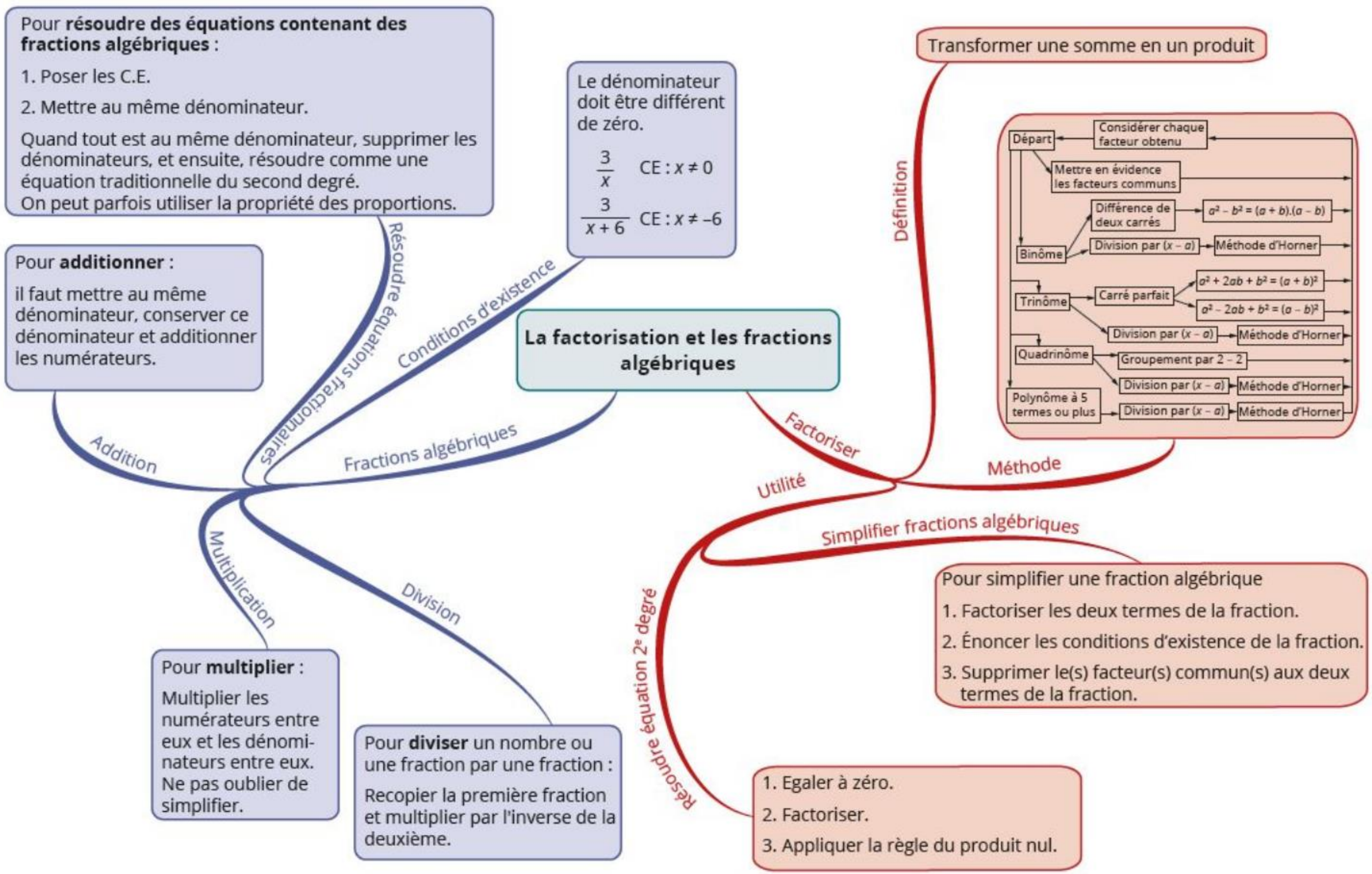
Simplification de fractions- CE : exercices

$$\frac{4a^2(a^2-b^2)}{3a^2+3ab}$$

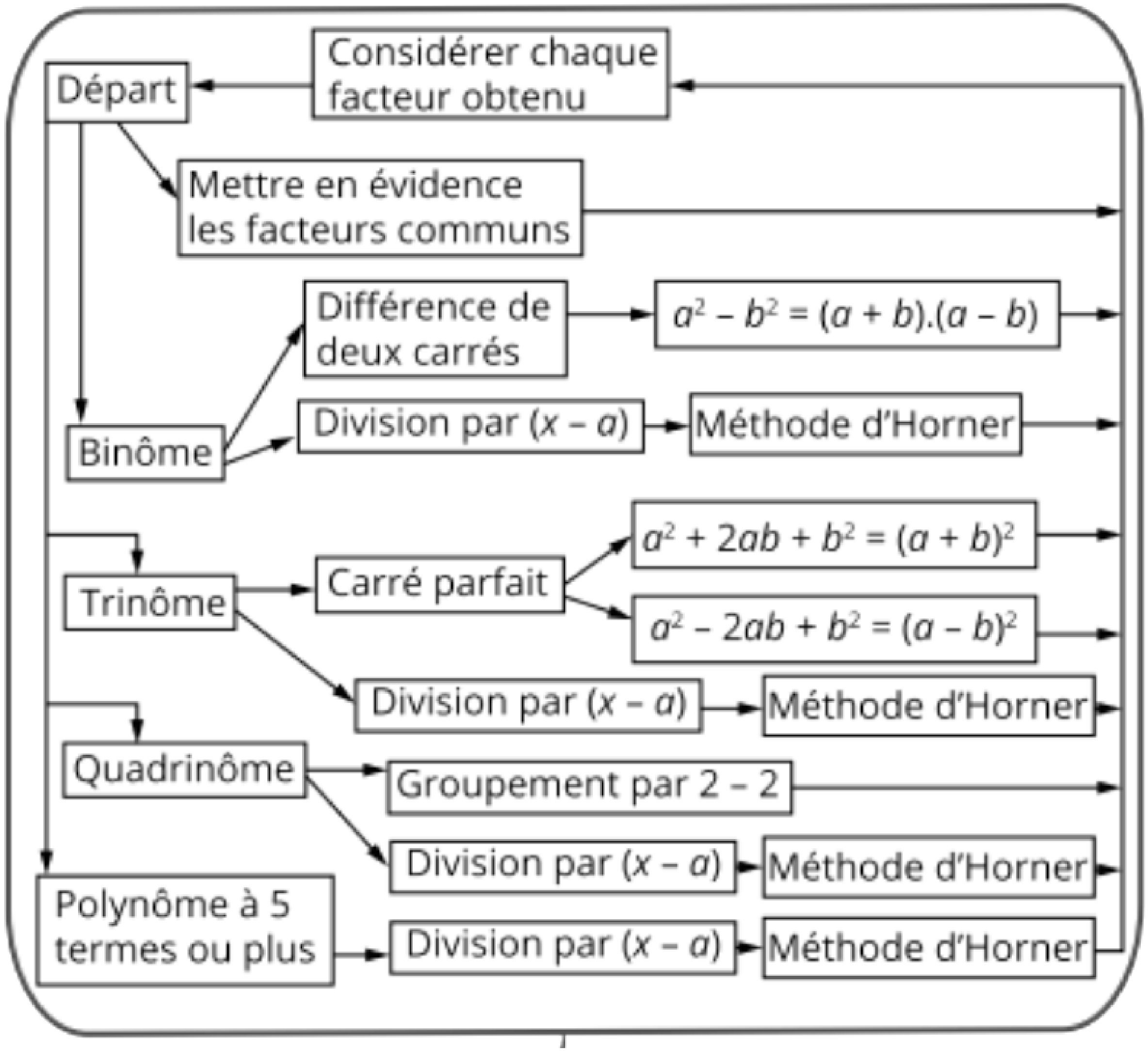
$$\frac{3x+6}{x^2-2x}$$

$$\frac{3x^2+12x+12}{x^2+5x+6}$$

$$\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+3x+2}$$



La factorisation et les fractions algébriques
Fractions algébriques
Résoudre équations fractionnaires
Pour **résoudre des équations contenant des fractions algébriques** :
1. Poser les C.E.
2. Mettre au même dénominateur.
Quand tout est au même dénominateur, supprimer les dénominateurs, et ensuite, résoudre comme une équation traditionnelle du second degré.
On peut parfois utiliser la propriété des proportions.
Conditions d'existence
Le dénominateur doit être différent de zéro.
$\frac{3}{x}$ CE : $x \neq 0$
$\frac{3}{x+6}$ CE : $x \neq -6$
Addition
Pour **additionner** :
il faut mettre au même dénominateur, conserver ce dénominateur et additionner les numérateurs.
Multiplication
Pour **multiplier** :
Multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux. Ne pas oublier de simplifier.
Division
Pour **diviser** un nombre ou une fraction par une fraction :
Recopier la première fraction et multiplier par l'inverse de la deuxième.
Factoriser
Définition
Transformer une somme en un produit
Méthode
Départ
Considérer chaque facteur obtenu
Mettre en évidence les facteurs communs
Binôme
Différence de deux carrés
$a^2 - b^2 = (a + b).(a - b)$
Division par $(x - a)$
Méthode d'Horner
Trinôme
Carré parfait
$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
Division par $(x - a)$
Méthode d'Horner
Quadrinôme
Groupement par 2 – 2
Division par $(x - a)$
Méthode d'Horner
Polynôme à 5 termes ou plus
Division par $(x - a)$
Méthode d'Horner
Utilité
Simplifier fractions algébriques
Pour simplifier une fraction algébrique
1. Factoriser les deux termes de la fraction.
2. Énoncer les conditions d'existence de la fraction.
3. Supprimer le(s) facteur(s) commun(s) aux deux termes de la fraction.
Résoudre équation 2e degré
1. Egaler à zéro.
2. Factoriser.
3. Appliquer la règle du produit nul.



Départ
Considérer chaque facteur obtenu
Mettre en évidence les facteurs communs
Différence de deux carrés
$a^2 - b^2 = (a + b).(a - b)$
Binôme
Division par $(x - a)$
Méthode d'Horner
$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
Trinôme
Carré parfait
$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
Division par $(x - a)$
Méthode d'Horner
Quadrinôme
Groupement par 2 – 2
Division par $(x - a)$
Méthode d'Horner
Polynôme à 5 termes ou plus
Division par $(x - a)$
Méthode d'Horner

D. Opérations sur les fractions rationnelles

1) Réduction au même dénominateur (AM P 254)

a) **Méthode** : pour réduire des fractions rationnelles au même dénominateur, il faut :

- **Factoriser** les polynômes des deux termes de la fraction (et indiquer les CE.)
- **Simplifier**, si possible, les **facteurs communs** d'une même fraction rationnelle.
- Déterminer le **dénominateur commun** qui est le **PPCM** des dénominateurs (il s'obtient en multipliant tous les facteurs communs ou non, chacun d'eux affecté de son plus grand exposant)
- Multiplier le numérateur et le dénominateur de chaque fraction par les facteurs qui permettent d'obtenir le dénominateur commun.

b) **Exemples**

$\frac{2}{9b^2}$ et $\frac{5}{6b^5}$	$\frac{a}{a^2-b^2}$ et $\frac{a}{5a-5b}$	$\frac{3}{a-2}$ et $\frac{a-5}{a^2-4a+4}$
$\frac{2.2b^3}{9b^2.2b^3}$ et $\frac{5.3}{6b^5.\ 3}$	$\frac{a}{(a-b)(a+b)}$ et $\frac{a}{5(a-b)}$	$\frac{3}{(a-2)}$ et $\frac{(a-5)}{(a-2)^2}$
$\frac{4b^3}{18b^5}$ et $\frac{15}{18b^5}$	$\frac{5.a}{5\ .(a-b)(a+b)}$ et $\frac{a\ (a+b)}{5(a-b)(a+b)}$	$\frac{3.\ (a-2)}{(a-2)^2}$ et $\frac{(a-5)}{(a-2)^2}$

c) **Remarque:**

Ce n'est généralement pas une bonne idée d'effectuer la multiplication des binômes au dénominateur. La plupart du temps, il est plus avantageux de laisser le dénominateur sous la forme d'un produit, parce qu'ainsi, on peut plus facilement effectuer d'autres simplifications par la suite.

d) **Exercices** Recherche du dénominateur commun

	PPCM		PPCM		PPCM
a et b		a^2 et a^5		$\frac{2}{x^2}$ et $\frac{5}{x}$	
2a et 3a		x et x^3		$\frac{3a}{x^3}$ et $\frac{2b}{x^2}$	
xy et yz		3 a^2 et 9a		$\frac{2x}{x+3}$ et $\frac{3x}{x+5}$	
10 x et 15 y		6 a^4 et 15 a^3		$\frac{2}{x}$ et $\frac{5}{x+3}$	

Factorise le dénominateur. Détermine le dénominateur commun et réduits les fractions au même D
$\frac{2x}{x^2-4}$ et $\frac{3x}{2x+4}$
$\frac{a}{a^2-2ab+b^2}$ et $\frac{b}{a-b}$

2) Addition et soustraction de fractions rationnelles

a) **Méthode** : pour additionner ou soustraire des fractions algébriques, il faut :

- Factoriser les dénominateurs quand ceux-ci sont des sommes algébriques
- Trouver le ppcm des dénominateurs
- Mettre les fractions au même dénominateur
- Additionner ou soustraire les numérateurs en conservant le dénominateur.
- Distribuer au numérateur et réduire les termes semblables
- si possible, factoriser le numérateur et/ou simplifier.

Remarque :

Ce n'est généralement pas une bonne idée d'effectuer la multiplication des binômes au dénominateur.
La plupart du temps, il est plus avantageux de laisser le dénominateur sous la forme d'un produit, parce qu'ainsi, on peut plus facilement effectuer d'autres simplifications par la suite

b) Exemples

- Exemple 1

$$\frac{5a}{a^2-9}+\frac{a^2}{3a-9}=\frac{5a}{(a-3)(a+3)}+\frac{a^2}{3(a-3)}$$ *Factoriser les dénominateurs*

$$=\frac{5a}{(a-3)(a+3)}*\frac{3}{3}+\frac{a^2}{3(a-3)}*\frac{(a+3)}{(a+3)}$$ *Mettre les fractions au même dénominateur*

$$=\frac{15a}{3(a-3)(a+3)}+\frac{a^2(a+3)}{3(a-3)(a+3)}$$

$$=\frac{15a+a^2(a+3)}{3(a-3)(a+3)}$$ *Additionner les numérateurs en conservant le dénominateur.*

$$=\frac{15a+a^3+3a^2}{3(a-3)(a+3)}$$ *Distribuer au numérateur et réduire les termes semblables*

$$=\frac{a(15+a^2+3a)}{3(a-3)(a+3)}$$ *Si possible, factoriser le numérateur et/ou simplifier*

- Exemple 2 : les dénominateurs sont opposés

$$\frac{5x}{x-3}-\frac{7x}{3-x}=\frac{5x}{x-3}-\frac{-7x}{-(3-x)}$$ *Mettre les fractions au même dénominateur*

$$=\frac{5x}{x-3}-\frac{-7x}{x-3}$$

$$=\frac{5x+7x}{x-3}$$ *Additionner les numérateurs en conservant le dénominateur.*

$$=\frac{12x}{x-3}$$ *Réduire les termes semblables*

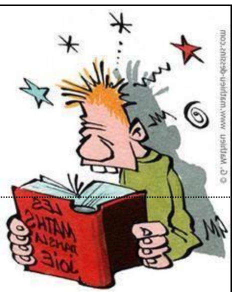
c) Exercices : (AM P **P 133 exercice B**)

Addition et soustraction de fractions algébriques (Actimath P 133 exercice B/ NAM p 128 exercice a)

Première colonne	Deuxième colonne
$\frac{3a}{2}+\frac{a}{5}$	$\frac{5}{2a}+\frac{4}{3a}$
$\frac{5x}{8}-\frac{3x}{4}$	$\frac{3}{xy}-\frac{2}{yz}$
$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}$	$\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{3a}$
$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}$	$\frac{3}{a}+\frac{5}{a^2}$
$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$	$\frac{5}{3x^2}-\frac{1}{2x}$

Troisième colonne (5ème colonne dans NAM)	Quatrième colonne (3ème colonne dans NAM)
$\frac{a+3}{2}+\frac{a-4}{3}$	$\frac{3}{5x^3}-\frac{2}{x}-2$
$\frac{x+2}{4}-\frac{3x-1}{5}$	$\frac{4}{5b^2}+\frac{3}{10b^3}-\frac{1}{12b}$
$\frac{a+b}{b}+\frac{a-b}{a}$	$\frac{2}{a^4}-\frac{5}{a^2}+3$
$\frac{x-2y}{x}-\frac{2x+y}{y}$	$\frac{5}{a^2b}-\frac{2}{ab^2}$
$\frac{a-3}{a}-\frac{a+4}{2a}$	$\frac{2}{a^2b^3}+\frac{3}{5a^5b^2}$

Cinquième colonne (4ème colonne dans NAM)
$\frac{5}{4a^3b^2}-\frac{7}{6ab^5}$
$\frac{5}{2a^3b}+\frac{1}{4a^6b^3}$
$\frac{2x}{15y^2}-\frac{3y}{5x^2}+\frac{1}{3xy}$
$\frac{5}{3a^3}+\frac{a}{6}-\frac{1}{4a}$
$\frac{2}{3ab^3}+\frac{2}{5a^3b}+2$



sixième colonne

$$\frac{5}{a \cdot (a+b)} - \frac{2}{b \cdot (a+b)}$$

$$\frac{2x}{(x-2) \cdot (x+3)} + \frac{3x}{(x-2) \cdot (x+4)}$$

$$\frac{-5}{(a+b)^2} + \frac{a-b}{a+b}$$

$$\frac{5}{(a-3) \cdot (a+3)} - \frac{1}{2 \cdot (a-3)^2}$$

$$\frac{x^3}{(x+y)^3} + \frac{x^2+y^2}{3 \cdot (x+y)^2} - \frac{3}{2 \cdot (x+y)}$$

Septième colonne

$$\frac{4}{a-3} + \frac{5}{a-2}$$

$$\frac{5}{x+y} + \frac{2}{x}$$

$$\frac{a}{a+b} - \frac{b}{a-b}$$

$$\frac{2}{x+y} - \frac{2x}{x^2-y^2}$$

$$\frac{3}{a^2+ab} + \frac{2}{ab+b^2}$$

Huitième colonne

$$\frac{5}{x-2} - 3x$$

$$2x + \frac{5x}{x-5}$$

$$\frac{2-x}{7} - 5x$$

$$\frac{7}{2-x} - 5x$$

$$x - \frac{3}{4-x}$$

Neuvième colonne

$$\frac{2x}{x^2-4} - \frac{5}{x+2}$$

$$\frac{5}{4a-2b} - \frac{2}{4a^2-b^2}$$

$$\frac{2a}{a-1} - \frac{4a}{1-a}$$

$$\frac{2}{x-3} - \frac{x}{9-x^2}$$

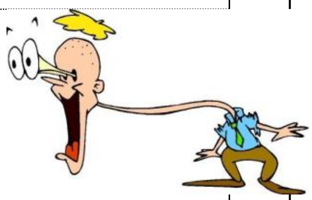
$$\frac{5x^2}{x^3+1} + \frac{4x}{x^2-1}$$

Dixième colonne (NAM page 129 série B colonne 5)

$$\frac{3}{a-b} - \frac{5}{a+b} + \frac{1}{a^2-b^2}$$

$$\frac{x}{2x-4} + \frac{3}{x^2-4} - \frac{x}{x-2}$$

$$\frac{3x}{x^2-4} - \frac{4x}{2x^2-x-6}$$



$$\frac{3x}{x^2-4} - \frac{4x}{2x^2-x-6}$$

$$\frac{3x}{x^2-4x+4} - \frac{5}{2-x} + \frac{1}{x+2}$$

3) Multiplication de fractions algébriques

a) Méthode

- Factoriser numérateurs et dénominateurs quand ceux-ci sont des sommes algébriques
- Multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux .
- si possible, simplifier la fraction obtenue.

b) Exemples résolus (Am p …….)

$$\frac{4a}{5c} \cdot \frac{15c}{ab} = \frac{60ac}{5abc} = \frac{12}{b}$$

$$\frac{a-2b}{x} \cdot \frac{x^2}{a^2-4b^2} = \frac{(a-2b) \cdot x^2}{x \cdot (a^2-4b^2)}$$

$$= \frac{x^2 \cdot (a-2b)}{x \cdot (a-2b) \cdot (a+2b)}$$

$$= \frac{x}{a+2b}$$

$$\frac{9x^2-4}{x^2-1} \cdot \frac{x-1}{2x-3x^2} = \frac{(3x-2) \cdot (3x+2) \cdot (x-1)}{(x-1) \cdot (x+1) \cdot x \cdot (2-3x)}$$

$$= \frac{-(3x-2) \cdot (3x+2) \cdot (x-1)}{(x-1) \cdot (x+1) \cdot x \cdot (-2+3x)}$$

$$= \frac{-(3x+2)}{x \cdot (x+1)}$$

$$\frac{x-5}{x^2+x-6} \cdot \frac{x^2-4x+4}{2} \cdot \frac{x+3}{x-5} =$$

factorisation de « $x^2 + x - 6$ ».

A l'aide de la loi du reste,

on vérifie si ce polynôme est divisible par $(x+1)$, $(x-1)$, $(x+2)$,$(x-2)$, etc.

On trouve qu'il est divisible par $(x-2)$.

Avec Horner, on factorise facilement : $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$

factorisation de « $x^2 - 4x + 4$ »

« $x^2 - 4x + 4$ » est un produit remarquable et est égal à $(x-2)^2$

on peut donc écrire le produit :

$$\frac{x-5}{x^2+x-6} \cdot \frac{x^2-4x+4}{2} \cdot \frac{x+3}{x-5} = \frac{x-5}{(x-2)(x+3)} \cdot \frac{(x-2)^2}{2} \cdot \frac{x+3}{x-5} = \frac{x-2}{2}$$

Remarque : il y a avantage à factoriser les polynômes intervenant dans un produit de fractions pour pouvoir ensuite simplifier le résultat.

c) Exercices (Am p 134-135 exercice C)

d) **Exercices** Actimath P 134-135 exercice C

Première colonne	Deuxième colonne
$\frac{3a}{b} \cdot \frac{5b}{2a}$	$\frac{x+y}{3} \cdot \frac{5}{x+y}$
$\frac{-2x}{5yz} \cdot \frac{-5y}{6x}$	$\frac{x-y}{2} \cdot \frac{5}{y-x}$
$\frac{3a^2b}{5x} \cdot \frac{15x^3}{ab^4}$	$\frac{x^2-4}{3} \cdot \frac{5}{4x-8}$
$\frac{-7a^3}{2b} \cdot \frac{-6b^3}{5a} \cdot \frac{-10a}{9b^2}$	$\frac{1+x}{x} \cdot \frac{3x^2}{x^2+2x+1}$

Troisième colonne
$5x^3 \cdot \frac{25x^2-4}{10x-25x^2}$
$\frac{2-4a}{4a^2-1} \cdot \frac{1-2a}{a^2-4a+4}$
$\frac{(a-b)^2}{b^2-4a^2} \cdot \frac{b^2-4ab+4a^2}{b^2-a^2}$
$\frac{x^2-3x-40}{x^2-x-6} \cdot \frac{x-3}{x+5}$

Quatrième colonne
$\frac{a^2-9}{4a+10} \cdot \frac{4a}{a^2-6a+9}$
$\frac{1}{2a^2-8} \cdot (2a^2-4a)$
$\frac{x^2+3x+2}{2-x} \cdot \frac{x^2-4}{x^2+x}$
$\frac{x^2-9}{x+2} \cdot \frac{2x+4}{x^3-3x^2-x+3}$

4) Division de fractions rationnelles (NAM P 294 :AM P 254)

a) Méthode

> Pour diviser une fraction par une fraction (non nulle),
>
> on multiplie la première fraction par l'inverse de la seconde.

b) Exemples résolus (NAm p 294)

$$\frac{4a}{5b} : \frac{2a}{3b} = \frac{4a}{5b} \cdot \frac{3b}{2a} = \frac{4a \cdot 3b}{5b \cdot 2a} = \frac{12ab}{10ab} = \frac{6}{5}$$

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{4a} : \frac{a^2-b^2}{2a} &= \frac{a+b}{4a} \cdot \frac{2a}{a^2-b^2} \\ &= \frac{(a+b) \cdot 2a}{4a \cdot (a^2-b^2)} \\ &= \frac{2a \cdot (a+b)}{4a \cdot (a+b) \cdot (a-b)} \\ &= \frac{1}{2 \cdot (a-b)} \end{aligned}$$

c) Exemples résolus (Am p …….)

Actimath P 134-135 exercice C

Division de fractions algébriques (Actimath P 135 exercice D)

Première colonne	Deuxième colonne
$\frac{x}{2y} : \frac{3x}{4}$	$\frac{15x}{7} : 3$
$\frac{-5}{7a} : \frac{10}{2a^2}$	$\frac{5x}{3} : 2$
$\frac{1}{a^3} : \frac{1}{a}$	$\frac{24ab}{5} : 3a$
$\frac{4a^3b}{c^4} : \frac{6ab^2}{c}$	$\frac{10}{x} : x$
$\frac{-2a^2x}{5b^5y} : \frac{-6x^2}{ay^2}$	$\frac{10x^2}{7} : x$

Troisième colonne
$\frac{3a-3}{a-2} : \frac{a^2-1}{3a-6}$
$\frac{2a-b}{4a^2} : \frac{b^2-4a^2}{6a}$
$\frac{2x^2-xy}{a+b} : \frac{x}{a^2-b^2}$
$(9a^2-6a+1) : \frac{6a^2-2a}{3a+1}$
$\frac{4-4x}{8} : (x^2-1)$

Quatrième colonne
$\frac{a^3-b^3}{6a-3b} : \frac{a^2+ab+b^2}{4a^2-b^2}$
$\frac{2x^2-9x+4}{2x-2} : \frac{16-x^2}{x^2-x}$

Cinquième colonne

$$\frac{\dfrac{a+2}{b^2-9}}{\dfrac{a^2-4}{b+3}}$$
$$\frac{\dfrac{x^2-4}{x-2}}{x+2}$$
$$\frac{\dfrac{-4x^3}{2a^2-50}}{\dfrac{6x}{2a-10}}$$
$$\frac{\dfrac{3x-6y}{4y^2-x^2}}{3}$$
$$\frac{x^2-4}{\dfrac{x-2}{x+2}}$$

Mélangeons ! (Actimath P 136 E)

$ab \cdot \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$
$$\frac{1-\dfrac{1}{a}}{a^2-1}$$
$\left(\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}\right) \cdot \frac{a^2-1}{2a}$
$$\frac{3a}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}}$$
$$\frac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}}$$
$\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right) : \left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$

E. Equations fractionnaires

1) Notions (AM P 253)

> Une équation fractionnaire est une équation où l'inconnue apparaît au dénominateur.
>
> Avant de la résoudre, il faut déterminer la condition d'existence de chaque fraction.
>
> Pour résoudre l'équation, on réduit les deux membres au même dénominateur et on les multiplie par ce dénominateur non nul.
>
> Certaines solutions de l'équation ainsi trouvées peuvent ne pas être solutions de l'équation donnée car elles ne satisfont pas aux conditions d'existence.

2) Exemples (AM P 253)

Exemple 1

$$\frac{x}{x+3} - \frac{x}{x-3} = \frac{18}{x^2-9}$$

Conditions d'existence :

$x + 3 \neq 0$ et $x - 3 \neq 0$

$x \neq -3$ et $x \neq 3$

$$\frac{x}{x+3} - \frac{x}{x-3} = \frac{18}{(x+3).(x-3)}$$

$$\frac{x.(x-3) - x.(x+3)}{(x+3).(x-3)} = \frac{18}{(x+3).(x-3)}$$

$$x.(x-3) - x.(x+3) = 18$$

$$x^2 - 3x - x^2 - 3x = 18$$

$$-6x = 18$$

$$x = -3$$

Cette solution est à rejeter en vertu des conditions d'existence.

L'équation n'admet pas de solution.

Exemple 2

$$\frac{4}{x} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{x^2}{x^2+x}$$

Conditions d'existence

$x \neq 0$ et $x + 1 \neq 0$

$x \neq -1$

$$\frac{4}{x} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{x^2}{x.(x+1)}$$

$$\frac{4.(x+1) + x.(x-1)}{x.(x+1)} = \frac{x^2}{x.(x+1)}$$

$$4x + 4 + x^2 - x = x^2$$

$$4x + 4 + x^2 - x - x^2 = 0$$

$$3x + 4 = 0$$

$$3x = -4$$

$$x = -\frac{4}{3}$$

La solution de l'équation est $-\frac{4}{3}$.

Exemple 3

$$\frac{x-2}{x} + \frac{4}{x-2} = \frac{8}{x^2-2x}$$

Conditions d'existence :

$x \neq 0$ et $x - 2 \neq 0$

$x \neq 2$

$$\frac{x-2}{x} + \frac{4}{x-2} = \frac{8}{x.(x-2)}$$

$$\frac{(x-2)^2 + 4x}{x.(x-2)} = \frac{8}{x.(x-2)}$$

$$(x-2)^2 + 4x = 8$$

$$x^2 - 4x + 4 + 4x - 8 = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$(x+2).(x-2) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$x + 2 = 0$ ou $x - 2 = 0$

$x = -2$ ou $x = 2$

Cette solution est à rejeter en vertu des conditions d'existence.

La solution de l'équation est -2.

1) Exercices (AM P 253) résous les équations suivantes

$\frac{5}{x} = \frac{3}{2}$	$\frac{3}{x} + \frac{2}{x+1} = \frac{1}{x}$	$\frac{x}{3} = \frac{12}{x}$
$\frac{-3}{4} = \frac{2}{x}$	$\frac{4}{x} - \frac{x}{x-1} = \frac{x^2}{x^2-x}$	$\frac{-1}{x} = \frac{-x}{4}$
$\frac{2}{x-4} = \frac{4}{5}$	$\frac{2x-1}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{2x^2}{x^2-1}$	$\frac{2}{x+1} = \frac{x+4}{2}$
$\frac{3}{x-1} = \frac{2}{2-3x}$	$\frac{2x+1}{1-x} = \frac{1-2x}{3+x}$	$\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{-x^2}{x^2-x}$
$\frac{3}{x+2} = \frac{2}{x+1}$	$\frac{x}{x+4} + \frac{x}{4-x} = \frac{1}{x^2-16}$	$\frac{2}{x^2-2x+1} - \frac{2}{1-x} = \frac{x^2}{x+1}$

b) Dans chacune des formules suivantes, exprime chaque variable en fonction des autres.

$S = \dfrac{b \cdot h}{2}$ $\qquad$ $S = \dfrac{(B + b) \cdot h}{2}$ $\qquad$ $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

$\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{d'}$ $\qquad$ $F = g \cdot \dfrac{m \cdot m'}{d^2}$ $\qquad$ $P = \dfrac{W}{t}$