Mathématiques : dossier de révision

Algebre

Appliquer - ressources

Documents rédigés par Mme Querton

Chapitre 4 : la factorisation

1. Factorisation d'un binôme

À connaître

Pour factoriser un binôme, on envisage dans l'ordre :

- la mise en évidence de facteurs communs

  Exemples : $6x^2 + 8xy = 2x \,.\, (3x + 4y)$ $\quad$ $3x^3 - 2x^2 = x^2 \,.\, (3x - 2)$
- le produit remarquable $a^2 - b^2 = (a + b) \,.\, (a - b)$

  Exemples : $16x^2 - 9y^2 = (4x + 3y) \,.\, (4x - 3y)$ $\quad$ $25x^2 - 1 = (5x + 1) \,.\, (5x - 1)$

- **Factorise les binômes ci-dessous.**

$45x + 18y =$	$9x^2 - 25y^2 =$ ....
$16 - x^2 =$	$5a^5 - 15a^3 =$ ....
$8a^2b - 12ab =$	$1 - 16x^2 =$ ....
$-4 + a^2 =$	$24xy^2 + 9x^2y =$ ....
$4a + 4a^2 =$	$9a^2 - b^2 =$ ....
$9a^2 + 9b^2 =$	$81a^9 - 9a^4 =$ ....

2. Factorisation d'un trinôme

À connaître

Pour factoriser un trinôme, on envisage dans l'ordre :

- la mise en évidence de facteurs communs

  Exemples : $8x^2 - 12x + 16 = 4 \,.\, (2x^2 - 3x + 4)$ $\quad$ $6ab - 2a + 4ac = 2a \,.\, (3b - 1 + 2c)$
- un produit remarquable $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ ou $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

  Exemples : $16x^2 + 24xy + 9y^2 = (4x + 3y)^2$ $\quad$ $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$

- **Factorise les trinômes ci-dessous.**

$12x + 4x^3 - 8x^2 =$	$4x^2 + 4x + 4 =$ ....
$4x^2 + 4x + 1 =$	$49 - 28x + 4x^2 =$ ....
$9a^2 - 12ab + 4b^2 =$	$2x^2 + 4 - 2x =$ ....
$2a - 6a^2 + 4a^3 =$	$6a^2b - 4ab^2 - 2ab =$ ....
$21a^3 - 7a + 14a^2 =$	$25a^2 + 16b^2 + 40ab =$ ....
$9x^2 - 6x + 1 =$	$9x^2 + 6xy + 9x =$ ....
$4a^2 + 6ab + 4a =$	$36a^2 - 60ab + 25b^2 =$ ....
$20xy + 25x^2 + 4y^2 =$	$5x^2 + 25x + 20xy =$ ....

Exercices divers

- **Relie les sommes et les produits égaux.**

$5x + 5$ •	• $(x + 2)^2$
$x^2 - 25$ •	• $5 . (x^2 + x + 1)$
$x^2 + 4x + 4$ •	• $(x - 5)^2$
$5x^2 + 5x + 5$ •	• $5 . (x + 1)$
$x^2 - 10x + 25$ •	• $(x + 5) . (x - 5)$
$x^2 - 4$ •	• $2 . (x - 2)^2$
$2x^2 - 8x + 8$ •	• $(x + 2) . (x - 2)$

- **Factorise au maximum les expressions ci-dessous.**

$3a^2 - 6a + 3 =$ .... $=$ ....

$15x^2 - 60y^2 =$ .... $=$ ....

$50 + 20a + 2a^2 =$ .... $=$ ....

$5ab^2 - 5ac^2 =$ .... $=$ ....

$20a^2 + 60ab + 45b^2 =$ .... $=$ ....

$3ab^2 - 12ac^2 =$ .... $=$ ....

$3x^2 - 12xy + 12y^2 =$ .... $=$ ....

$(3x - 2) . (4x - 3) + (x - 4) . (3x - 2) =$ ....

$=$ ....

$(x + 2) . (x - 3) - 5 . (3 - x) =$ ....

$=$ ....

Chapitre 5 : les puissances à exposants négatifs

1. Transformations d'écriture

Attention

Avant de calculer des puissances numériques, il est impératif de rendre leurs exposants positifs.

Exemples : $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = \frac{-1}{8}$ $\frac{1}{5^{-2}} = 5^2 = 25$ $(-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$

La réponse finale d'un calcul comprenant des puissances littérales s'écrit en utilisant des exposants positifs.

Exemples : $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$ $a^2b^{-3} = \frac{a^2}{b^3}$ $a^{-2}b^3 = \frac{b^3}{a^2}$ $a^{-2}b^{-3} = \frac{1}{a^2b^3}$

Astuce

Dans des calculs sur les puissances littérales, il est plus facile de transformer les quotients en produits.

Exemples : $\frac{1}{a^3} = a^{-3}$ $\frac{1}{a^{-2}} = a^2$ $\frac{a^{-4}}{b^{-5}} = a^{-4}b^5$

- **Écris les expressions suivantes avec des exposants positifs, puis calcule.**

$4^{-2} =$ ……… $10^{-3} =$ ……… $(-5)^{-2} =$ ……… $(-3)^{-4} =$ ………

$7^{-1} =$ ……… $3^{-3} =$ ……… $-5^{-2} =$ ……… $-4^{-3} =$ ………

- **Écris les expressions suivantes avec des exposants positifs, puis calcule.**

$4^2 . 2^{-3} =$ ……… $6^{-2} . 3^4 =$ ……… $2^3 . 4^{-2} =$ ………

$10^2 . 5^{-2} =$ ……… $8^{-2} . 4^3 =$ ……… $3^3 . 9^{-1} =$ ………

- **Transforme les expressions ci-dessous en produits.**

$\frac{a^{-2}}{b^{-3}} =$ ……… $\frac{a^2}{b^{-4}} =$ ……… $\frac{a^2}{b^{-3}c^4} =$ ……… $\frac{a^{-2}}{b^3c^{-2}} =$ ………

$\frac{a^{-4}}{b^3} =$ ……… $\frac{a^5}{b^3} =$ ……… $\frac{a^3}{b^2c^4} =$ ……… $\frac{a^4}{b^2c^3} =$ ………

2. Produit de puissances de même base

À connaître

Pour multiplier des puissances de même base, on conserve la base et on additionne les exposants.

Exemples : $b^{-4} . b^{7} = b^{-4+7} = b^{3}$ $\quad$ $a^{3} . a^{-5} = a^{3+(-5)} = a^{-2} = \frac{1}{a^{2}}$

- **Réduis les expressions ci-dessous et écris ta réponse finale en n'utilisant que des exposants positifs.**

$x^{7} . x^{-3} =$ .... $\quad$ $c^{2} . c^{-7} =$ .... $\quad$ $2y^{-5} . 3y^{-5} =$ ....

3. Puissance d'une puissance

À connaître

Pour élever une puissance à une autre puissance, on conserve la base et on multiplie les exposants.

Exemples : $(a^{-3})^{2} = a^{-3.2} = a^{-6} = \frac{1}{a^{6}}$ $\quad$ $(b^{4})^{-3} = b^{4.(-3)} = b^{-12} = \frac{1}{b^{12}}$ $\quad$ $(c^{-2})^{-3} = c^{-2.(-3)} = c^{6}$

- **Réduis les expressions suivantes en utilisant la technique expliquée ci-dessus.**

$(a^{-2})^{3} =$ .... $\quad$ $(a^{-4})^{-2} =$ .... $\quad$ $(a^{-7})^{-3} =$ ....

$(a^{2})^{-5} =$ .... $\quad$ $(a^{-2})^{2} =$ .... $\quad$ $(a^{3})^{-3} =$ ....

Attention

Dans certains cas, nous sommes amenés à appliquer deux propriétés, l'une à la suite de l'autre.

Exemple : $a^{3} . (a^{-2})^{4} = a^{3} . a^{-8}$ $\quad$ Puissance d'une puissance

$= a^{-5}$ $\quad$ Produit de puissances de même base

$= \frac{1}{a^{5}}$ $\quad$ Transformation (exposant positif)

- **Réduis les expressions suivantes.**

$a^{8} . (a^{2})^{-3} =$ .... $\quad$ $(a^{-3})^{-4} . a^{-4} =$ ....

$(a^{-2})^{3} . a^{-4} =$ .... $\quad$ $5a^{-2} . (a^{2})^{-6} =$ ....

$a^{5} . (a^{-1})^{3} =$ .... $\quad$ $-3a^{2} . (a^{-2})^{2} =$ ....

4. Quotient de puissances de même base

Astuce

Pour réduire un quotient de deux puissances de même base, il est conseillé de le transformer en un produit, puis d'appliquer la propriété du produit de deux puissances de même base.

Exemples : $\frac{b^3}{b^{-6}} = b^3 \, . \, b^6 = b^{3+6} = b^9$ $\qquad$ $\frac{a^5}{a^7} = a^5 \, . \, a^{-7} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$

- **Transforme les expressions ci-dessous en un produit, réduis-les, puis écris ta réponse finale en n'utilisant que des exposants positifs.**

$\frac{a^5}{a^4} =$ ……………… $\qquad \frac{a^{-7}}{a^2} =$ ……………… $\qquad \frac{a^3}{a^{-3}} =$ ………………

$\frac{a^{-4}}{a^{-7}} =$ ……………… $\qquad \frac{a^7}{a^{-5}} =$ ……………… $\qquad \frac{a^2}{a^5} =$ ………………

5. Puissance d'un produit

À connaître

Pour élever un produit de facteurs à une puissance, on élève chaque facteur à cette puissance.

Exemples : $(a \, . \, b)^{-3} = a^{-3} \, . \, b^{-3} = \frac{1}{a^3b^3}$ $\qquad$ $(2 \, . \, a)^{-5} = 2^{-5} . \, a^{-5} = \frac{1}{2^5a^5} = \frac{1}{32a^5}$

- **Réduis les expressions suivantes en utilisant la technique expliquée ci-dessus.**

$(ab)^{-4} =$ ……………… $\qquad (-ab)^{-3} =$ ………………

$(3a)^{-3} =$ ……………… $\qquad (-2ab)^{-5} =$ ………………

Attention

Dans certains cas, nous sommes amenés à appliquer deux propriétés, l'une à la suite de l'autre.

Exemples

$(a^4b^{-2})^{-3} = (a^4)^{-3}(b^{-2})^{-3}$	Puissance d'un produit	$(-2b^{-5})^{-3} = (-2)^{-3}(b^{-5})^{-3}$
$= a^{-12} \, . \, b^6$	Puissance d'une puissance	$= (-2)^{-3} \, . \, b^{15}$
$= \frac{b^6}{a^{12}}$	Transformation (exposant positif)	$= \frac{b^{15}}{(-2)^3}$
		$= \frac{b^{15}}{-8}$
		$= \frac{-b^{15}}{8}$

- **Réduis les expressions suivantes.**

$(a^3b)^{-2} =$ ....

$(-5a^{-3})^{-2} =$ ....

$(3a^{-2})^3 =$ ....

$(-4a^5)^{-3} =$ ....

6. Puissance d'une fraction

À connaître

Pour élever une fraction à une puissance, on peut :

– élever chaque terme de la fraction à cette puissance

Exemple

$$\left(\frac{a^{-4}}{b^2}\right)^{-5} = \frac{(a^{-4})^{-5}}{(b^2)^{-5}} = \frac{a^{20}}{b^{-10}} = a^{20}b^{10}$$

– transformer la fraction en un produit et élever chaque facteur à cette puissance.

Exemple

$$\left(\frac{a^{-4}}{b^2}\right)^{-5} = (a^{-4}\,.\,b^{-2})^{-5} = (a^{-4})^{-5}\,.\,(b^{-2})^{-5} = a^{20}b^{10}$$

- **Réduis les expressions suivantes en utilisant une des deux techniques expliquées ci-dessus.**

$\left(\frac{x^2}{y^4}\right)^{-2} =$ ....

$\left(\frac{x^{-4}}{y^5}\right)^{-5} =$ ....

$\left(\frac{a^4}{b^{-2}}\right)^{-4} =$ ....

$\left(\frac{2x^2}{y^3}\right)^{-3} =$ ....

$\left(\frac{3a^{-3}}{b^{-4}}\right)^{-2} =$ ....

Chapitre 7 : Approche graphique d'une fonction

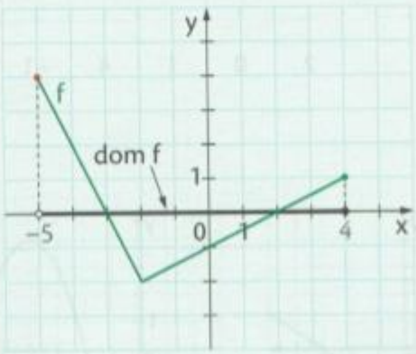
1. Domaine d'une fonction

À connaître

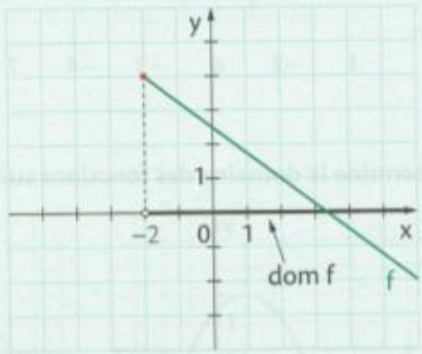
Le domaine d'une fonction est l'ensemble des réels ayant une image par cette fonction.

Le graphique d'une fonction permet de visualiser le domaine de cette fonction sur l'axe x.

Exemples

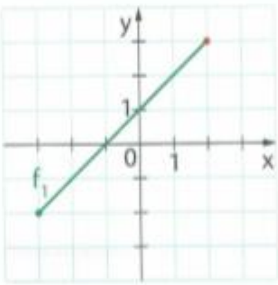


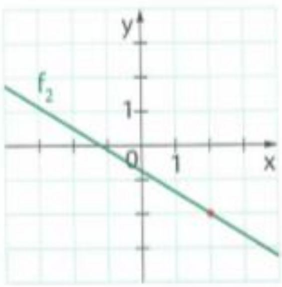
dom f =] –5 ; 4]

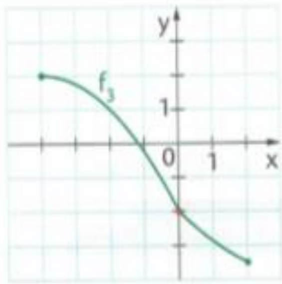


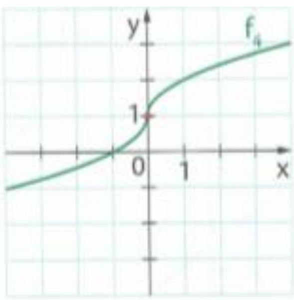
dom f =] –2 ; →

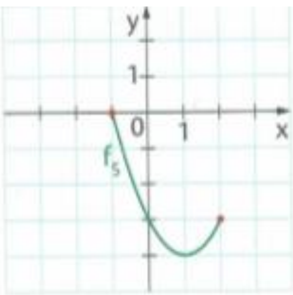
- **Voici six graphiques de fonctions. Associe à chacune d'elles son domaine.**

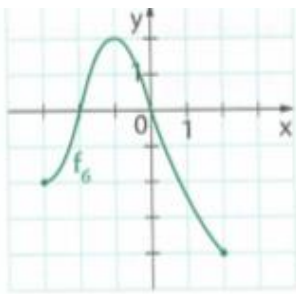






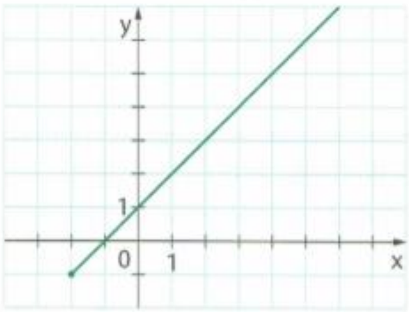




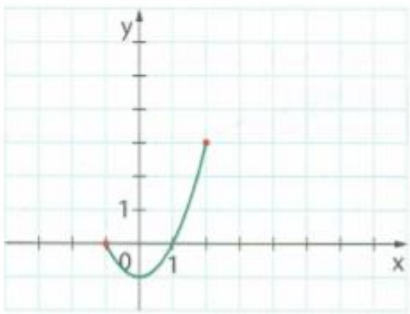


Domaine	[–4 ; 0 [∪]0 ; 2]	] –1 ; 2 [	ℝ \ {2}	[–3 ; 2]	[–3 ; 2 [	ℝ \ {0}
Fonction						

- **Entoure les nombres qui appartiennent au domaine des fonctions suivantes.**

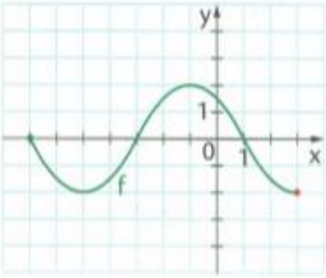


1 −2 6 −3 −4 7

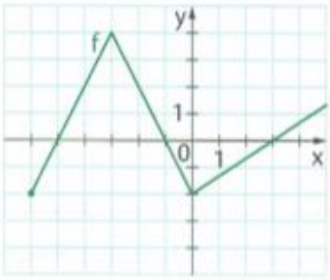


2 0 1 4 −1 −2

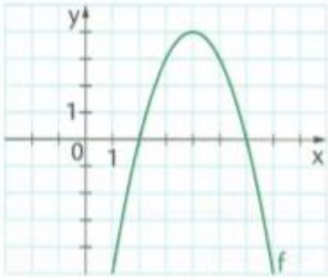
- **Détermine le domaine des fonctions suivantes.**



dom f = ...



dom f = ...



dom f = ...

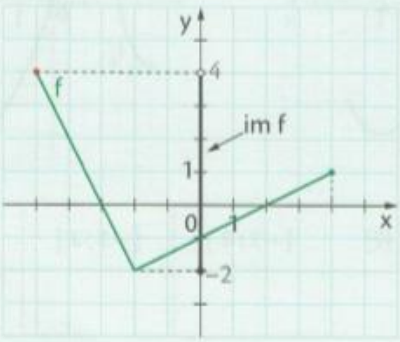
2. Ensemble image

À connaître

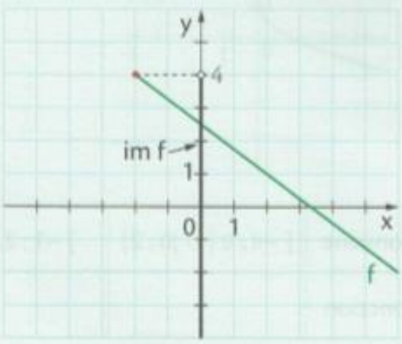
L'ensemble image d'une fonction est l'ensemble des réels images par cette fonction.

Le graphique d'une fonction permet de visualiser l'ensemble image de cette fonction sur l'axe y.

Exemples

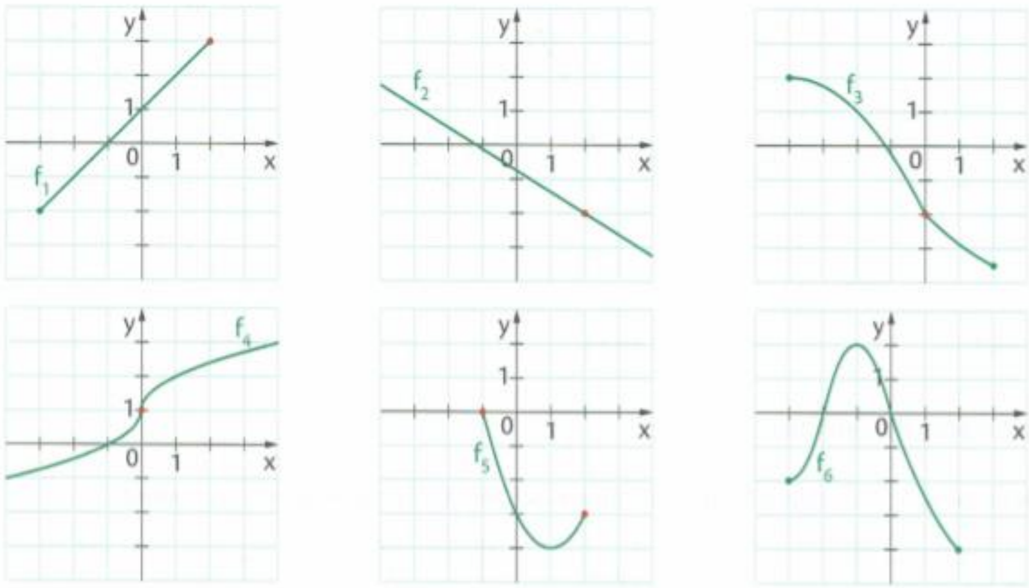


im f = [−2 ; 4 [



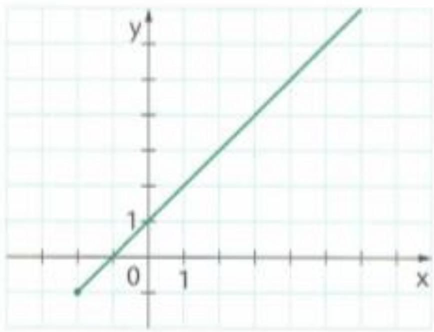
im f = ← ; 4 [

- **Voici six graphiques de fonctions. Associe à chacune d'elles son ensemble image.**

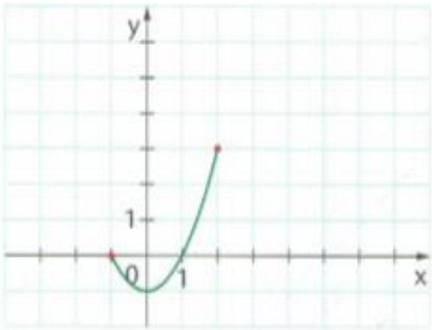


Ensemble image	$\mathbb{R} \setminus \{1\}$	$[-2 ; 3[$	$[-4 ; 0[$	$\mathbb{R} \setminus \{-2\}$	$[-4 ; 2]$	$[-3{,}5 ; -2[\cup]-2 ; 2]$
Fonction						

- **Entoure les nombres qui appartiennent à l'ensemble image des fonctions suivantes.**

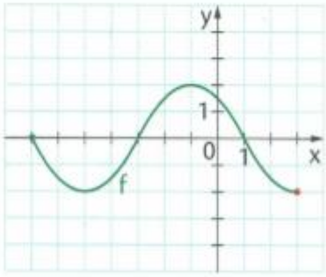


2 −2 1 −5 3 5

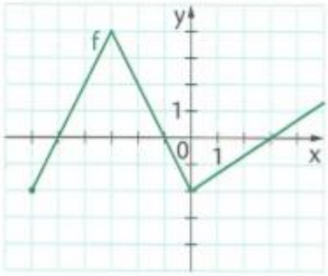


0 3 −1 4 2 −2

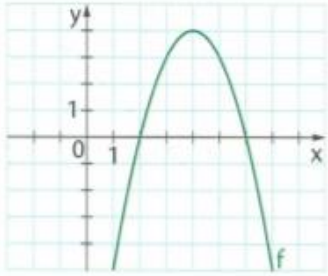
- **Détermine l'ensemble image des fonctions suivantes.**



im f = ...



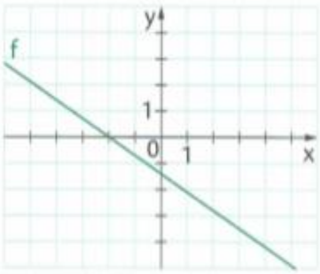
im f = ...



im f = ...

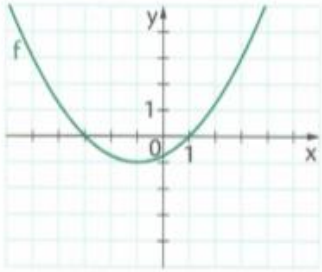
3. Exercices de synthèse

- **Détermine le domaine et l'ensemble image des fonctions représentées ci-dessous.**



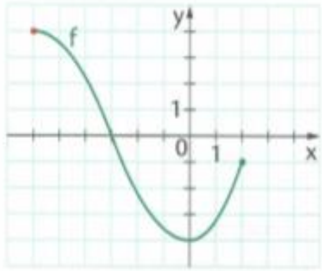
dom f = ...

im f = ...



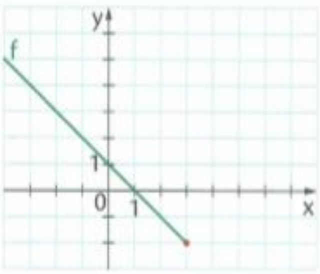
dom f = ...

im f = ...



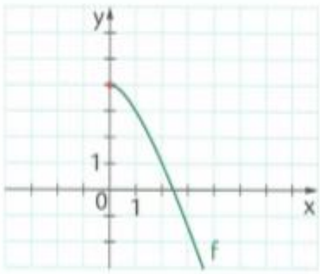
dom f = ...

im f = ...



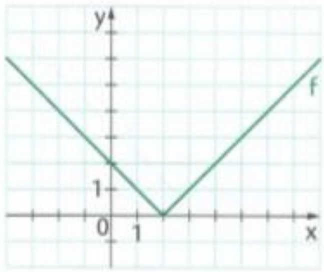
dom f = ...

im f = ...



dom f = ...

im f = ...



dom f = ...

im f = ...

Les équations

1. Equations avec parenthèses

À connaître

La résolution d'une équation comprenant des parenthèses se décompose en trois grandes étapes.

1[re] étape : faire disparaître les parenthèses en appliquant :
- la distributivité et/ou
- les règles de suppression de parenthèses.

Attention, si les parenthèses sont précédées du signe « – », n'oublie pas de changer le signe des termes contenus dans les parenthèses !

2[e] étape : réduire les termes semblables dans chaque membre de l'équation.

3[e] étape : résoudre l'équation du type $ax + b = cx + d$ ainsi obtenue.

Exemple

$$x + 3 - (7 - 4x) = 5x + 2 \cdot (x + 1)$$

1[re] étape

$$\underline{x} + \underline{3} - \underline{7} + \underline{4x} = \underline{5x} + \underline{2x} + 2$$

2[e] étape

$$5x - 4 = 7x + 2$$

3[e] étape

$$-4 - 2 = 7x - 5x$$

$$-6 = 2x$$

$$-6 : 2 = x$$

$$-3 = x$$

- **Résous les équations après les avoir écrites sous la forme ax + b = cx + d.**

$2 \cdot (x - 5) = 5x - 3 \cdot (2 - x)$

$5x - (x - 3) = 2 + (-6 + x)$

$-(2x - 1) + 6x = -3 . (x + 2) - 4$

$x - 3 . (x - 5) = 2x + 5 . (3 + x)$

$-2x + 3 . (x - 3) = 2 - (x - 6)$

$5 - (2x - 1) = 4 - 3 . (x + 2)$

2.Equations plus complexes

1. Équations et proportions

À connaître

Certaines équations se présentent sous la forme d'une proportion (égalité entre deux rapports).

Une technique de résolution simple est d'utiliser la propriété fondamentale des proportions :

> dans toute proportion,
> le produit des extrêmes est égal
> au produit des moyens.

Après avoir appliqué cette propriété, il ne reste plus qu'à résoudre l'équation obtenue.

Exemple

$$\frac{x+3}{2} = \frac{2x-5}{3}$$

$$3 . (x+3) = 2 . (2x-5)$$

$$3x + 9 = 4x - 10$$

$$9 + 10 = 4x - 3x$$

$$19 = x$$

- **Indique en-dessous de chaque équation si tu peux oui ou non utiliser la propriété fondamentale des proportions pour résoudre celle-ci sans la transformer.**

$\frac{2x-4}{2} = \frac{6}{7}$ ……………… $2 + \frac{x}{5} = 4$ ……………… $\frac{5}{6} - \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$ ……………… $\frac{5-x}{2} = \frac{6+3x}{5}$ ………………

- **Résous les équations ci-dessous en appliquant la propriété fondamentale des proportions.**

$\frac{3x}{4} = \frac{x-2}{5}$ $\qquad$ $\frac{3-2x}{4} = \frac{x-1}{3}$ $\qquad$ $\frac{5-4x}{3} = \frac{2x-3}{2}$

………………

………………

………………

………………

………………

$\frac{3x-5}{3} = \frac{-3x-2}{4}$ $\qquad$ $\frac{x-3}{2} = \frac{-x+1}{4}$ $\qquad$ $\frac{2-3x}{4} = \frac{2x+1}{5}$

………………

………………

………………

………………

………………

3. Equations « produit nul » (vue dans le chapitre 4)

1. Règle du produit nul

À connaître

Un produit de facteurs est nul
$\Updownarrow$
au moins un des facteurs est nul.

$a . b = 0$
$\Updownarrow$
$a = 0$ ou $b = 0$

- **Complète.**

Dans le produit $(x + 2) . (x - 3)$,
le 1er facteur .... est nul si x vaut ....
le 2^{e} facteur .... est nul si x vaut ....

Dans le produit $3x . (x - 7)$,
le 1er facteur .... est nul si x vaut ....
le 2^{e} facteur .... est nul si x vaut ....

Dans le produit $(2x - 1) . (x + 1)$,
le 1er facteur .... est nul si x vaut ....
le 2^{e} facteur .... est nul si x vaut ....

Dans le produit $(5 - x) . x$,
le 1er facteur .... est nul si x vaut ....
le 2^{e} facteur .... est nul si x vaut ....

- **Entoure le ou les nombres réels qui vérifient chaque égalité.**

$(x + 4) . (x - 6) = 0$	4	−6	6	−4
$2x . (9 - x) = 0$	2	9	−9	0
$(x - 5)^2 = 0$	0	5	−5	1/5
$(3x - 6) . (1 - x) = 0$	−1	1	2	−2

2. Résolution d'une équation « produit nul »

À connaître

Une équation « produit nul » est une équation dont l'un des membres est un produit et dont l'autre membre est nul.

Pour résoudre une équation « produit nul », on applique la règle du produit nul.

$$(x - 5) . (2x + 6) = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$x - 5 = 0 \quad \text{ou} \quad 2x + 6 = 0$$
$$x = 5 \qquad 2x = -6$$
$$x = \frac{-6}{2}$$
$$x = -3$$
$$S = \{-3 ; 5\}$$

- **Résous les équations suivantes en appliquant la règle du produit nul.**

$(x + 4) . (x - 3) = 0$
$\Updownarrow$
....
....
S = ...

$(2x - 4) . (x + 1) = 0$
$\Updownarrow$
....
....
S = ...

$(6 + 3x) . (5x - 10) = 0$
$\Updownarrow$
....
....
S = ...

$(5 + 2x) . (3x - 5) = 0$
$\Updownarrow$
....
....

$x . (x - 3) = 0$
$\Updownarrow$
....
....

$(x - 5) . 2x = 0$
$\Updownarrow$
....
....

Attention

Cas particuliers

$4 \,.\, (x + 3) = 0$
$\Updownarrow$
$4 = 0$ ou $x + 3 = 0$
Impossible $x = -3$
$S = \{-3\}$

$(x - 4)^2 = 0$
$(x - 4) \,.\, (x - 4) = 0$
$\Updownarrow$
$x - 4 = 0$
$x = 4$
$S = \{4\}$

- **Résous les équations suivantes en tenant compte des cas particuliers ci-dessus.**

$(x - 7)^2 = 0$	$2 \,.\, (3x + 1) = 0$	$2x \,.\, (3x + 12)^2 = 0$
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
....	....	....
....	....	....
S = ...	S = ...	S = ...

3. Équations de degré supérieur à 1

À connaître

Marche à suivre pour résoudre une équation de degré supérieur à 1.

Transformer l'équation en une équation équivalente dont un des membres est nul.	$x^3 = 16x$ $x^3 - 16x = 0$
Factoriser le membre non nul afin d'obtenir, si possible, des facteurs du premier degré.	$x \,.\, (x^2 - 16) = 0$ $x \,.\, (x + 4) \,.\, (x - 4) = 0$ $\Updownarrow$
Appliquer la règle du produit nul et résoudre séparément chaque équation.	$x = 0$ ou $x + 4 = 0$ ou $x - 4 = 0$ $x = 0$ $\quad x = -4$ $\quad x = 4$
Écrire l'ensemble des solutions.	$S = \{-4, 0, 4\}$

- **Utilise la méthode décrite précédemment pour résoudre les équations suivantes.**

$x^2 = -5x$

$\Updownarrow$

S = ……………………

$4x^2 = 9$

$\Updownarrow$

S = ……………………

$2x^2 = 5x$

$\Updownarrow$

S = ……………………

$x^2 = -6x - 9$

$\Updownarrow$

S = ……………………

$5x^2 = 10x - 5$

$\Updownarrow$

S = ……………………

$3x^3 - 27x = 0$

$\Updownarrow$

S = ……………………

$2x^2 = 12x - 18$

$\Updownarrow$

S = ……………………

$x^3 = 4x$

$\Updownarrow$

S = ……………………

$27x^3 = 18x^2 - 3x$

$\Updownarrow$

S = ……………………