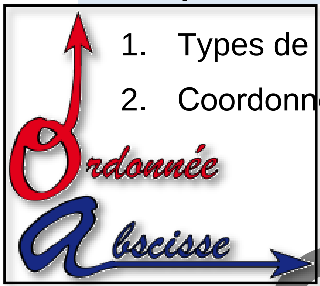
Séquence 2

Pythagore et repère orthonormé

Distance entre 2 points un plan cartésien

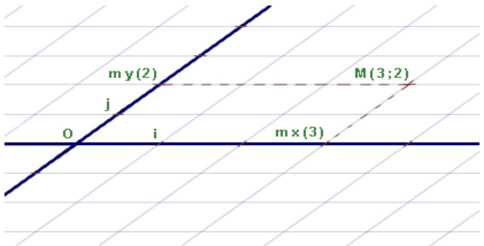
Sommaire



A. Repères

1) Types de Repères

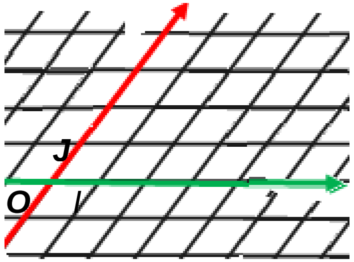
a) Repère quelconque



Le quadrillage est formé de parallélogrammes.

$$|OI| \neq |OJ|$$

b) Repère normé

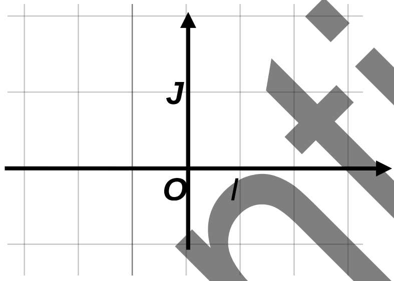


Le quadrillage est formé de losanges.

$$|OI| = |OJ|$$

Le repère est normé.

c) Repère orthogonal

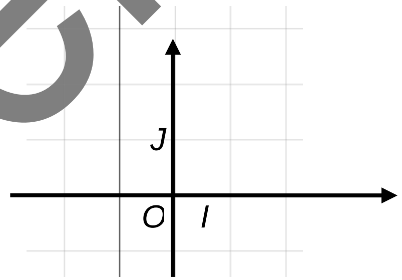


Le quadrillage est formé de rectangles.

$$|OI| \neq |OJ| \text{ et } OI \perp OJ$$

Le repère est ortho et pas normé.

d) Repère orthonormé



Le quadrillage est formé de carrés

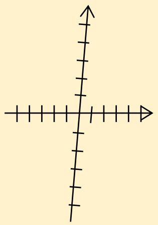
$$|OI| = |OJ| \text{ et } OI \perp OJ$$

On dit qu'un repère du plan (O, I, J) est **orthonormé** lorsque :

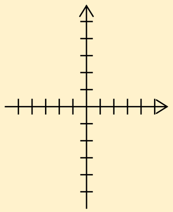
- Les axes des abscisses et des ordonnées sont perpendiculaires, c'est à dire $OI \perp OJ$.
- Les unités de longueur sont les mêmes sur les deux axes c'est à dire $|OI| = |OJ|$.

I et J sont **toujours** les points de coordonnées respectives (1 ; 0) et (0 ; 1).

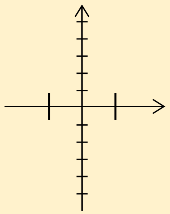
e) Exercices : Retrouve le(s) repère(s) orthonormé(s)



Repère non orthonormé
car les axes non perpendiculaires



Repère orthonormé

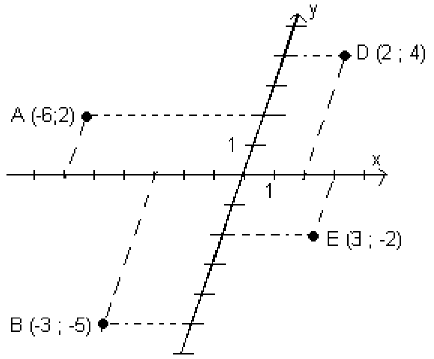


Repère non orthonormé
CAR les unités sont différentes

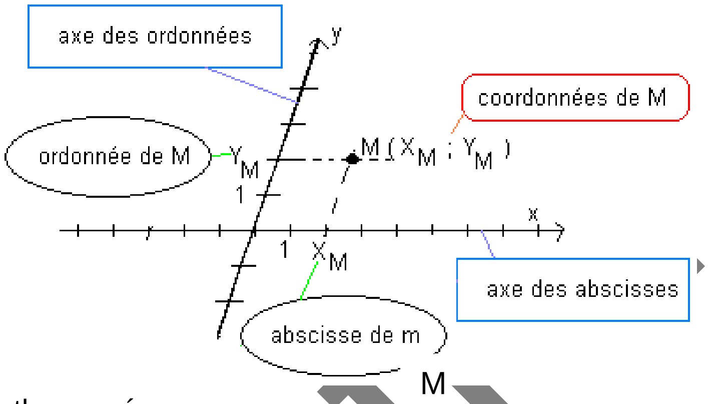
2) Coordonnées d'un point dans le plan

Rappels

Exemple

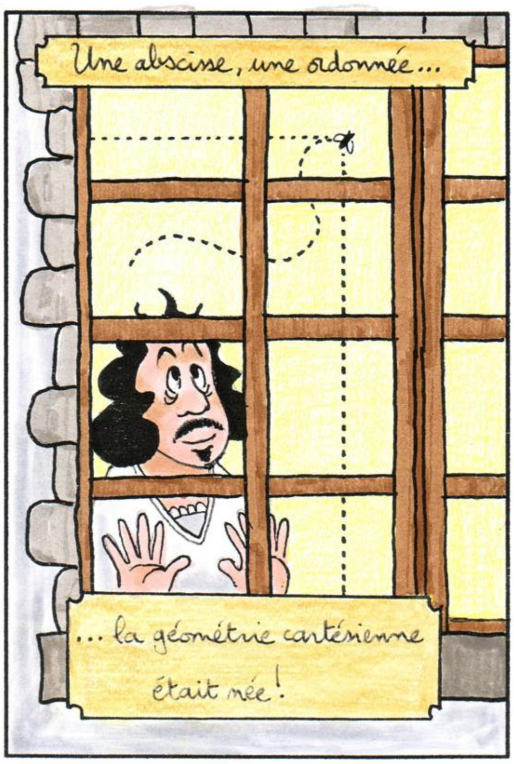


et vocabulaire



Le repère (*O*, *I*, *J*) présenté n'est **pas** orthonormé.

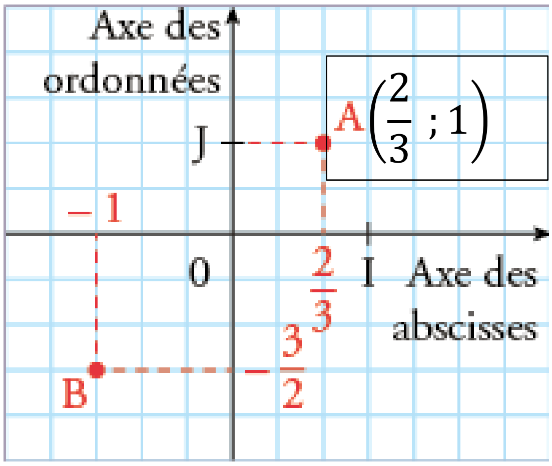
Pour qu'un repère (O,I,J) soit orthonormé il faut que $|OI| = |OJ|$ **= 1 et** $OI \perp OJ$



La coordonnée d'un point *A* du plan est le couple

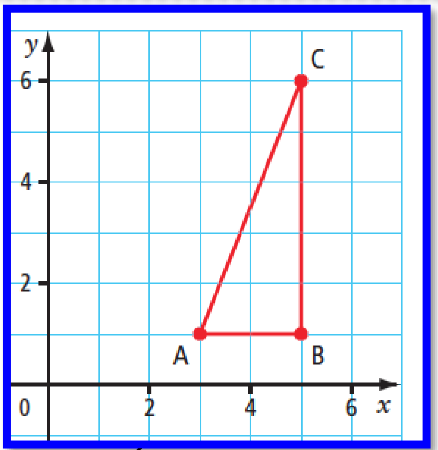
$$(x_A \; ; \; y_A)$$

Abscisse **ordonnée**



B. Distance de deux points dans un repère orthonormé

1) Mission : DETERMINE la longueur de l'hypoténuse du Δ *ABC*



Pistes :

- **DÉTERMINE** la longueur du segment [CB] :

  |CB| = ……………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………

  Pour trouver cette longueur tu as ……………………………………………

  ……………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………

- **DÉTERMINE** la longueur du segment [AB] :

  |AB| = ……………………………………………………………………………

  Pour trouver cette longueur tu as ……………………………………………

  ……………………………………………………………………………………

- **CALCULE** de la longueur de l'hypoténuse.

  Δ ABC rectangle en B car les côtés [CB] et [AB] tracés sur le quadrillage d'un repère orthonormé

  Le théorème de Pythagore peut s'appliquer :

  |AC|² = ……………………………………………………………

  |AC|² = ……………………………………………………………

  |AC|² = ……………………………………

  |AC| = ……………………………………

- **ÉCRIS** les coordonnées du point *C* et du point *A*.

  C : (……., ……….) → C : (x_C ; y_C)

  A : (……., ……….) → A : (x_A ; y_A)

- **RECHERCHE** le lien **entre** les calculs pour trouver la longueur de l'hypoténuse **et** les coordonnées des points.

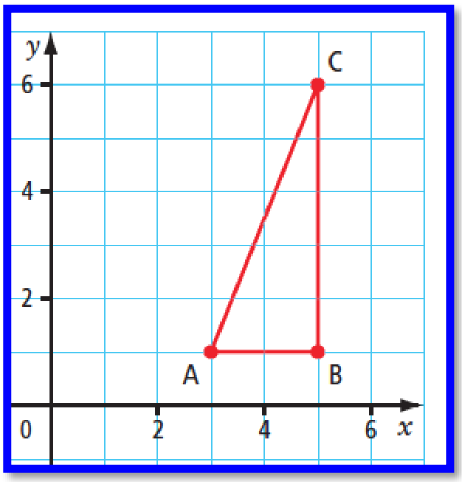
  |AC|² = …………………………………… → |AC|² = ……………………………………

  |AC| = …………………………………… |AC| = ……………………………………

Mission 1 accomplie ?

La longueur de l'hypoténuse du Δ *ABC* est ……………… cm.

2) Mission : DETERMINE la coordonnée *M* du milieu du segment [*AC*]



- **PLACE** le point *P* milieu du segment [*AB*].
- **ÉCRIS** les coordonnées des points *A*, *B* et *P*.

RECHERCHE le lien entre les coordonnées des points *A* et *B* **et** les coordonnées du point *P*.

A : (…….., ……….) ⟹ *A* : (x_A ; y_A)

B : (…….., ……….) ⟹ *B* : (x_B; y_B)

P : (…….., ……….) ⟹ *P* : (x_P; y_P)

Conclusion 1 :

P : (……………., ……………) ⟹ *P* (………… ; …………)

Recherche 2

- **PLACE** le point *R* milieu du segment [*BC*].
- **ÉCRIS les coordonnées des trois points :**

B : (…….., ……….)

C : (…….., ……….)

R : (…….., ……….)

- **APPLIQUE** ce que tu as découvert lors de la recherche 1.

R : (………………….., ………………..)

R : (…….., ……….)

Cela confirme/infirme la relation trouvée en 1.

Appliquons nos découvertes à la mission

- **ÉCRIS les coordonnées des trois points :**

A : (…….., ……….)

C : (…….., ……….)

M : (………………., ……………….)

M : (…….., ……….)

Mission 2 accomplie ?

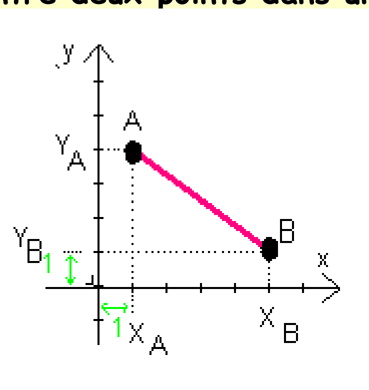
La coordonnée du point *M* milieu du segment [*AC*] est ……………..

3) Point matière

- La coordonnée générale d'un point dans le plan est notée ….
  Exemples : *A* $(x_A\ ;\ y_A)$ et *B* $(x_B\ ;\ y_B)$
- La lettre grecque représentant le *d* et appelée **delta** est Δ
  aussi utilisé pour noter la « différence des … ».
  Elle est notée par le symbole Δ (delta $\rightarrow$ d $\rightarrow$ différence)
  Ex : la différence des abscisses peut être notée Δx et signifie par exemple $x_B - x_A$

Synthèse dans un repère orthonormé :

Distance entre deux points dans un repère orthonormé ou longueur d'un segment



$$|AB|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

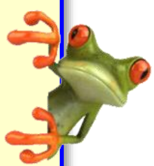
OU

$$\boxed{|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

Coordonnées du milieu *M* d'un segment

Le milieu *M* de [*AB*] a pour coordonnées : $(x_M ; y_M)$

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$



C.Exercices

Série 1.

Le repère (*O, I, J*) est orthonormé (unité 1 cm).

A(3 ; 2) B(1 ; 4) C(7 ; 3) D(5 ; 0) E(0 ; 4)

DÉTERMINE les longueurs demandées

$|AB|^2$ **= $(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$**

$|AB|^2$ **= $(1 - 3)^2 + (4 - 2)^2$**

$|AB|^2$**= $(-2)^2 + 2^2$**

$|AB|^2$**= 4 + 4**

$|AB|^2$ **= 8** donc $|AB|$ **≈ 2,8**

A (…., ….)
B (…., ….)

$|AD|^2 = (x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2$

$|AD|^2$ = (…………….)² + (……….)²

$|AD|^2$ = (……….)² + (……….)²

$|AD|^2$ = ………. + ……….

$|AD|^2$ = ……

donc $|AD|$ ………..

…. (…., ….)
…. (…., ….)

$|BE|^2 = (x_E - x_B)^2 + (y_E - y_B)^2$

…. (…., ….)
…. (…., ….)

$|BE|^2$= (…………)² + (……..)²

$|BE|^2$ = (……….)² + (……….)²

$|BE|^2$=………. + ……….

$|BE|^2$= ……

donc $|BE|$ ………..

$|AC|^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2$

$|AC|^2$ = (…………..)² + (…………)²

$|AC|^2$ = (……….)² + (……….)²

$|AC|^2$= ………. + ……….

$|AC|^2$ = ……

donc $|AC|$ ………..

…. (…., ….)
…. (…., ….)

$|BC|^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2$

…. (…., ….)
…. (…., ….)

$|BC|^2$ = (……….)² + (……….)²

$|BC|^2$= (……….)² + (……….)²

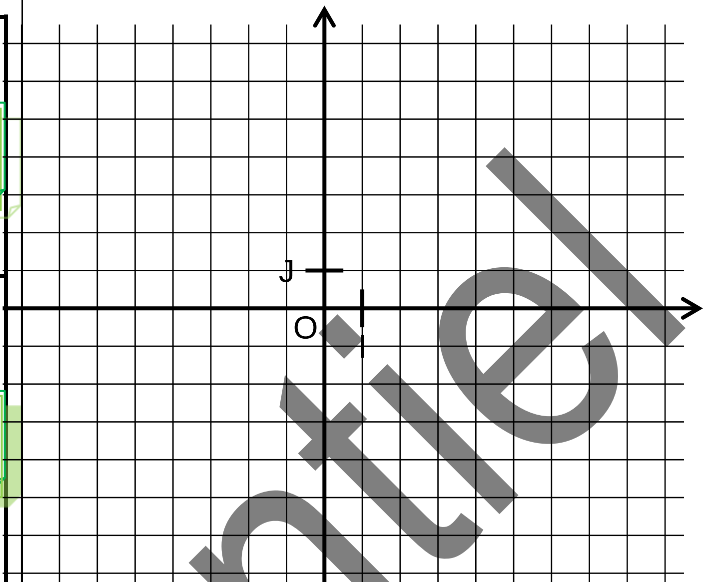
$|BC|^2$ = ………. + ……….

$|BC|^2$= …… donc $|BC|$ …….

Le repère (*O, I, J*) est orthonormé (unité 0,5 cm).

a. Placer dans ce repère les points :

A(5 ; 6) *B*(9 ; 3) *C*(-4 ; 7) *D*(2 ; -7) *E*(-8 ; -



Détermine $|AB|$, $|BC|$, $|CD|$, $|DE|$ et $|AE|$ (en unités).

$|AB|^2$ = ………………………………

…. (…., ….)
…. (…., ….)

=………………………………

=………………………………………

Donc $|AB|$ ………..

$|BC|^2$= ………………………………

…. (…., ….)
…. (…., ….)

=………………………………………

=………………………………………

Donc $|BC|$ ………..

$|CD|^2$ = ………………………………

…. (…., ….)
…. (…., ….)

=………………………………

=………………………………………

Donc $|CD|$ ………..

$|AE|^2$ =………………………………

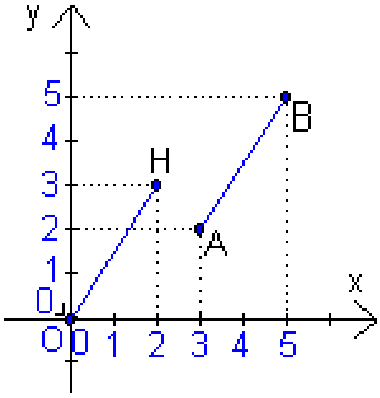
…. (…., ….)
…. (…., ….)

=………………………………

=………………………………………

Donc $|AE|$ ………..

Série 2. **DÉTERMINE** la longueur des segments demandés.



a) $|OH| =?$

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

b) $|AB| =?$

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

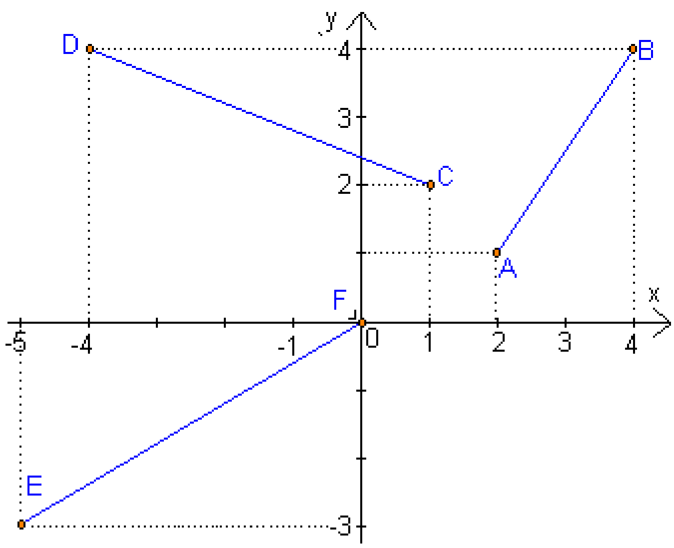
b) Soit *K*(5001 ;7000) et *C*(2001 ; 1000). $|KC| =?$

………

………

………

Série 3. **DÉTERMINE** la longueur des segments [AB] ; [CD] et [EF].



$|AB|$ ……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

$|CD|$ ……………………………………………………………

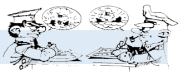
……………………………………………………………

……………………………………………………………

$|EF|$ ……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………



Série 4. Dans un repère du plan, des points sont donnés par leur coordonnée :

K(1 ;4) ; L(2 ;4,5) ; *M*(0,3) ; *N* (4,5) ; *P* (3 ;4,9)

Quels sont ceux qui sont sur le cercle de centre C(4 ; 0) et de rayon 5 ? (Points cocycliques)

....

....

....

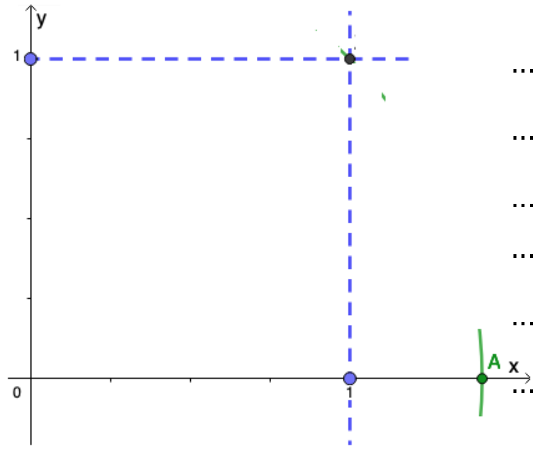
....

....

....

Réponse : les points cocycliques sont le(s) point(s) ....

Série 5. **DÉTERMINE** l'abscisse du point A.



....

....

....

....

....

....

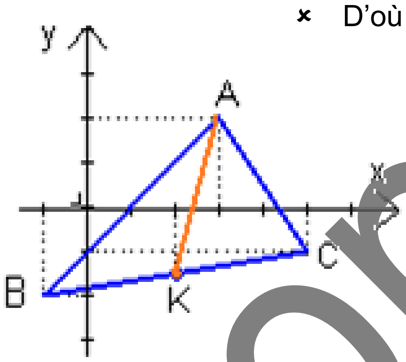
Réponse : l'abscisse du point A *est .....*

Série 6.

Enoncé : Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on place trois points $A(3\,;2)$; $B(-1\,;-2)$ et $C(5\,;-1)$.

DÉTERMINE la longueur de la médiane issue de A.

Stratégie : la médiane rejoint le sommet A au milieu du côté $[BC]$.



- D'où on calcule d'abord les **coordonnées du milieu K de $[BC]$.**

$$x_K = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-1+5}{2} = 2$$

$$y_K = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-2+(-1)}{2} = -\frac{3}{2}$$

Le milieu K de $[BC]$ a pour coordonnées :

- Ensuite on calcule la longueur $[AK]$

$$|AK| = \sqrt{(x_K - x_A)^2 + (y_K - y_A)^2}$$

$$= \sqrt{(2-3)^2 + \left(-\frac{3}{2} - 2\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{53}{4}} = \frac{\sqrt{53}}{2}$$

Réponse : la longueur de la médiane [AK] est $\frac{\sqrt{53}}{2}$ soit environ 3,64.

G1 S3

Démo hauteur

G1 S1

Hauteur équi

G1 S1

Hauteur équi ex

G1 S1

Tracer

G1 S3

Démo cathètesr

G1 S3

Démo 1 hauteur

G1 S3

Démo 3

Hauteur en fonction des trois cotés d'un triangle rectangle

Séquence 3

Relations métriques

Dans le triangle rectangle

Sommaire

I Recherches

II Exercices

I. Recherches

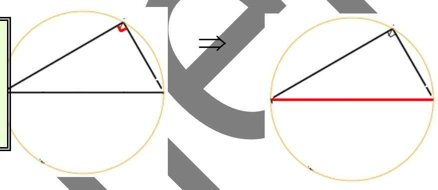
A. Triangle rectangle et cercle

Remarquons que les deux premières propriétés ont déjà été étudiées.

Propriété 1

Si un triangle est inscrit à un cercle et est rectangle

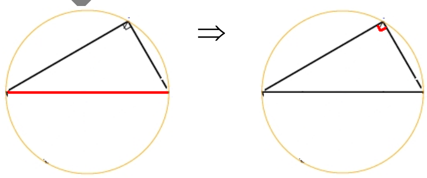
Alors l'hypoténuse de ce triangle est diamètre du cercle



Propriété 2

Si un côté d'un triangle inscrit à un cercle est diamètre de ce cercle,

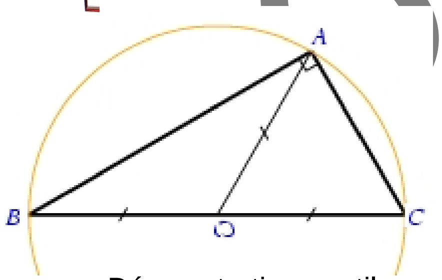
Alors ce triangle est rectangle et l'angle opposé au diamètre est droit



Propriété 3 : Théorème dit de la médiane

Dans tout triangle rectangle,

la médiane relative à l'hypoténuse mesure la moitié de cette hypoténuse. (voir théo ....)



Hypothèse : ΔABC rectangle en A

O milieu de $[BC]$: $|BO| = |OC|$

$[OA]$ médiane relative à $[BC]$

Thèse : $|OA| = \frac{1}{2}|BC|$

Démonstration : outil : propriété 1

ΔABC rectangle en A

$\Rightarrow$ [BC] diamètre du cercle circonscrit au triangle.

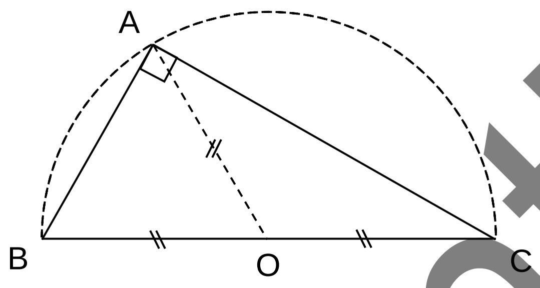
$\Rightarrow$ le milieu O de [BC] est le centre du cercle circonscrit au triangle.

$\Rightarrow$ $|OA|$ = r =(rayon) = $\frac{diamètre}{2} = \frac{1}{2}|BC|$ *cqfd*

Propriété 4 Réciproque

Si dans un triangle, la médiane relative à un côté mesure la moitié de ce côté,

Alors le triangle est rectangle et le côté dont il est question est l'hypoténuse



Hypothèse : $\Delta\, ABC$

[OA] médiane relative à [BC]

$|OA| = \frac{1}{2}|BC|$

Thèse : Δ ABC rectangle en A

Démonstration : outil : propriété 2

$|OA| = \frac{1}{2}|BC|$ par hypothèse

$\Rightarrow$ $|OA| = |BO| = |OC|$

$\Rightarrow$ O est le centre du cercle circonscrit passant par *A, B* et *C*

$\Rightarrow$ [BC] est le diamètre du cercle circonscrit au $\Delta\, ABC$

$\Rightarrow$ Par la propriété 2 : $\Delta\, ABC$ est rectangle en A *cqfd*

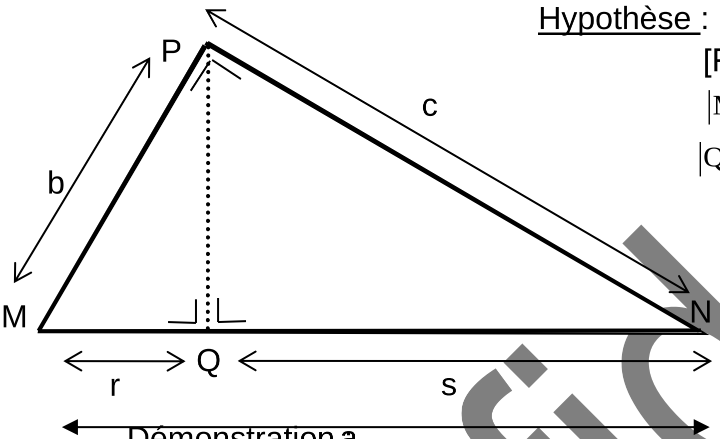
B. Triangle rectangle et hauteur

<u>Propriété 5 :</u> propriété de la hauteur relative à l'hypoténuse

Dans tout triangle rectangle,
le carré de la hauteur relative à l'hypoténuse est égal
au produit des longueurs des segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.

ou

Dans tout triangle rectangle,
la longueur de la hauteur relative à l'hypoténuse est $\left\{\begin{array}{l}\text{moyenne proportionnelle}\\ \text{moyenne géométrique}\end{array}\right\}$
entre les longueurs des segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.



<u>Hypothèse</u> : $\Delta\, MNP$ rectangle en P
[PQ] hauteur relative à l'hypoténuse [MN]

$|MP| = b$ $\quad |MN| = a$ $\quad |PN| = c$

$|QN| = s$ $\quad |MQ| = r$ $\quad |PQ| = h$

<u>Thèse</u> : $\boxed{h^2 = r \cdot s}$

<u>Démonstration</u>

- Il y a trois triangles rectangles dans lesquels on peut appliquer le théorème de Pythagore :
  - Dans $\Delta\, MNP$: $a^2 = b^2 + c^2$
  - Dans $\Delta\, MPQ$: $\mathbf{b^2 = h^2 + r^2}$ ①
  - Dans $\Delta\, NPQ$: $\mathbf{c^2 = h^2 + s^2}$ ②
- Comme a = r + s

  $a^2 = (r + s)^2$ produit remarquable

  $\mathbf{a^2 = r^2 + 2 \cdot r \cdot s + s^2}$ ③

- $a^2 = a^2$

  $r^2 + 2 \cdot r \cdot s + s^2 = b^2 + c^2$ *par ③ et ①*

  $r^2 + 2 \cdot r \cdot s + s^2 = h^2 + r^2 + h^2 + s^2$ *par ① et ②*

  $2 \cdot r \cdot s = 2\, h^2$ *par simplification des termes semblables*

  $r \cdot s = h^2$ *par simplification*

  $h^2 = r \cdot s$ cqfd

G1 S3

Démo 1 hauteur

C. Triangle rectangle et cathètes

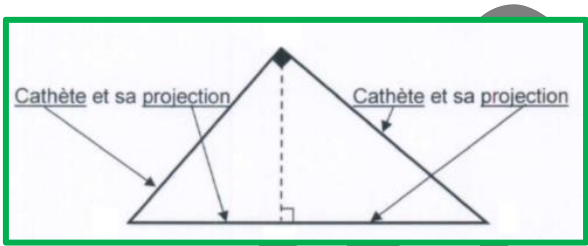
<u>Propriété 6 :</u> propriété des côtés de l'angle droit

> Dans tout triangle rectangle,
> le **carré** de la longueur d'un **côté de l'angle droit** est égal
> au **produit** de sa projection orthogonale sur l'hypoténuse par l'hypoténuse entière.

ou

> Dans tout triangle rectangle,
> la mesure d'un côté de l'angle droit est $\left\{\begin{array}{l}\text{moyenne proportionnelle}\\ \text{moyenne géométrique}\end{array}\right\}$
> entre la mesure de l'hypoténuse et la mesure de la projection orthogonale de ce côté sur l'hypoténuse.

Vocabulaire

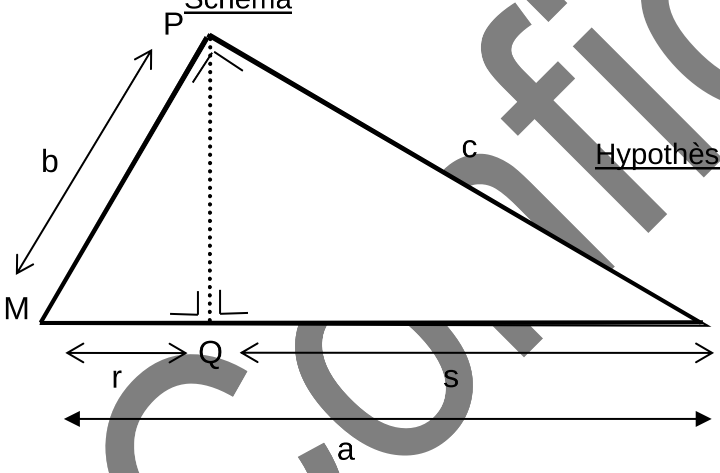


G1 S3

Démo cathètesr

Démonstration

Schéma



<u>Hypothèse</u> : Δ MNP rectangle en P

[PQ] hauteur relative à l'hypoténuse [MN]

$\lvert MP\rvert = b$	$\lvert MN\rvert = a$	$\lvert PN\rvert = c$
$\lvert QN\rvert = s$	$\lvert MQ\rvert = r$	$\lvert PQ\rvert = h$

<u>Thèse</u> : $\boxed{b^2 = a \cdot r}$ et $\boxed{c^2 = a \cdot s}$

<u>Démonstration</u> :

comme a = r + s, on peut écrire successivement

$a \cdot r = (r + s) \cdot r$ *multiplions les 2 membres par r*	$a \cdot s = (r + s) \cdot s$ *multiplions les 2 membres par r*
$= r^2 + r \cdot s$ *par distributivité*	$= r \cdot s + s \cdot s$ *par distributivité*
$= r^2 + h^2$ *par propriété de la hauteur*	$= h^2 + s^2$ *par propriété de la hauteur*
$= b^2$ *par propriété de la hauteur*	$= c^2$ *par propriété de la hauteur*

cqfd

D. Triangle rectangle , hauteur et cathètes

<u>Propriété 7 Hauteur en fonction des trois côtés d'un triangle rectanble</u>

Dans un triangle rectangle,

le produit des mesures de l'hypoténuse et de la hauteur correspondante égale

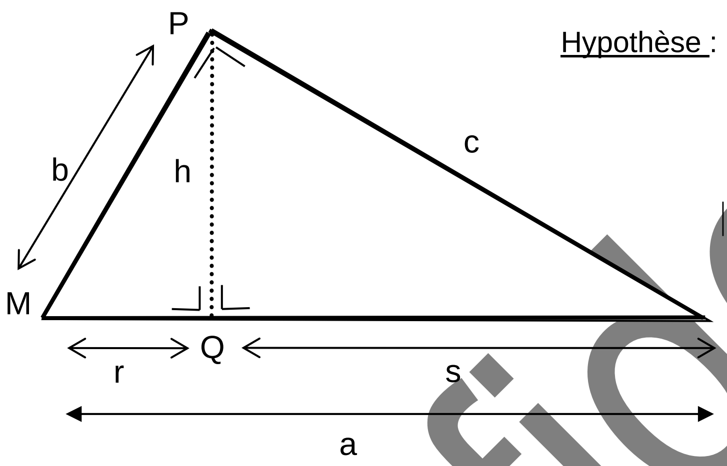
le produit des mesures des côtés de l'angle droit.

G1 S3

Démo 3

<u>*Démonstration*</u>

<u>Schéma</u>



<u>Hypothèse</u> : Δ *MNP* rectangle en *P*

[PQ] hauteur relative à l'hypoténuse [MN]

$|MP| = b$ $\quad |MN| = a$ $\quad |PN| = c$

$|QN| = s$ $\quad |MQ| = r$ $\quad |PQ| = h$

<u>Thèse</u> : $\boxed{b \cdot c = h \cdot a}$

<u>Démonstration</u> :

Exprimons l'aire du triangle *PNM* rectangle en *P* de deux façons différentes *:*

Si la base est un côté de l'angle droit | Si la base est l'hypoténuse

$$\alpha = \frac{c \cdot b}{2} \qquad \Big| \qquad \alpha = \frac{h \cdot a}{2}$$

$$\frac{c \cdot b}{2} = \frac{h \cdot a}{2}$$

$$c \cdot b = h \cdot a$$

$$\boxed{b \cdot c = h \cdot a}$$

ou

$$\boxed{h = \frac{b \cdot c}{a}}$$

cqfd

II. Exercices

Dans un triangle rectangle, la hauteur issue du sommet de l'angle droit, détermine des segments dont les mesures vérifient les relations suivantes dites relations métriques :

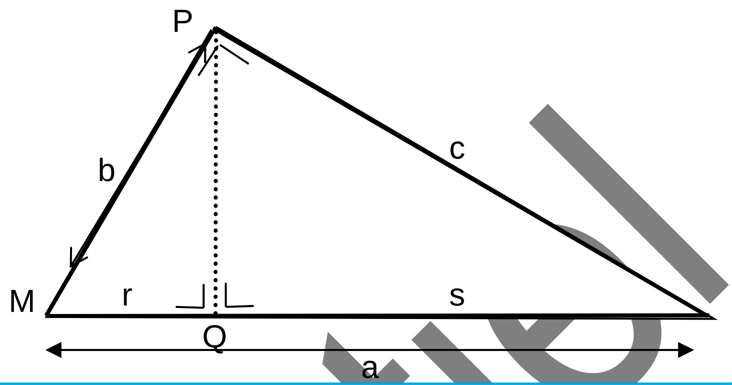
$$h^2 = r \cdot s$$

$$b^2 = r \cdot a \quad et\ c^2 = s \cdot a$$

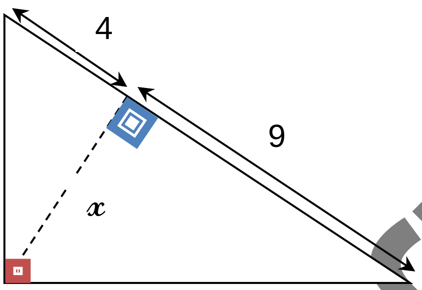
$$h \cdot a = b \cdot c$$

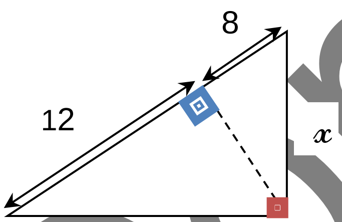
N'oublions pas

$$a^2 = b^2 + c^2$$

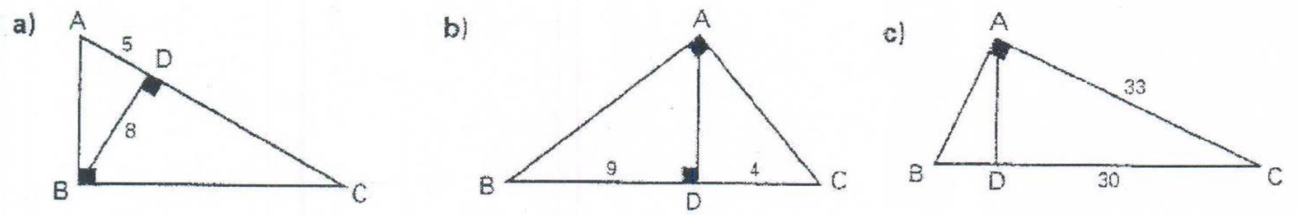


Série 1 : Détermine la valeur de x dans chaque situation.



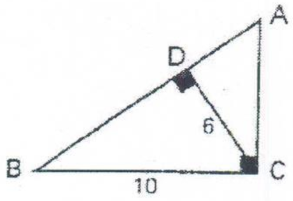


Série 2 : DETERMINE les longueurs demandées.



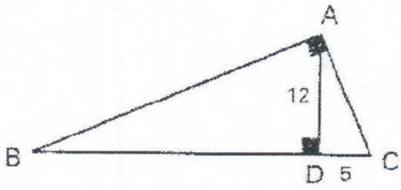
$\overline{CD}$ = ____________ $\overline{AD}$ = ____________ $\overline{BD}$ = ____________

d)



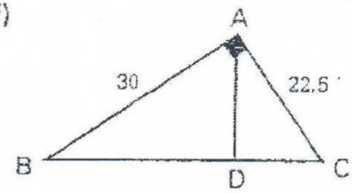
$\overline{AB}$ = ______________

e)



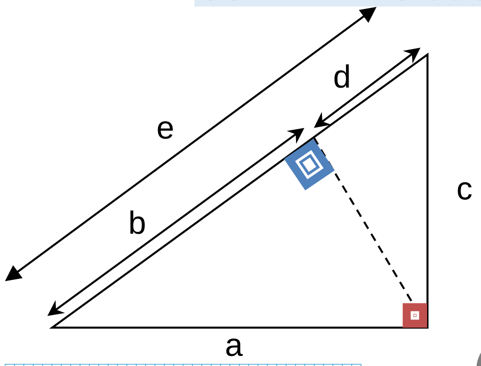
$\overline{AB}$ = ______________

f)



$\overline{AD}$ = ______________

Série 3 : Sur le triangle rectangle suivant, a, b, c, d, e et h désignent des longueurs.
COMPLETE le tableau avec les valeurs exactes.

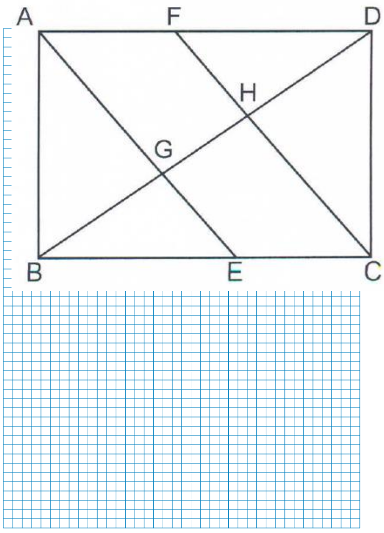


	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*h*
1°)		12		5		
2°)		9			15	
3°)				3	7	

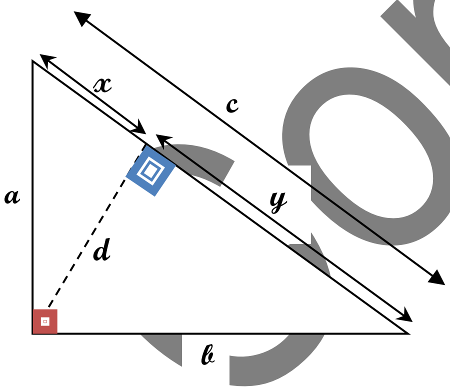
Série 4 : Dans un triangle rectangle, **DETERMINE** la longueur des côtés de l'angle droit, sachant que la hauteur relative à l'hypoténuse divise celle-ci en deux segments respectivement de 3 cm et 5 cm.

Série 5 : L'hypoténuse d' un triangle rectangle mesure 4 cm.
La hauteur relative à l'hypoténuse détermine sur celle-ci deux segments dont l'un mesure 3cm.
DETERMINE la longueur de cette hauteur.

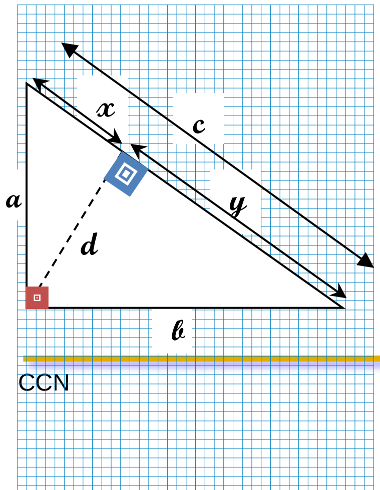
Série 6 : Le rectangle *ABCD* mesurent 20 cm sur 15 cm.
Les segments $[AE]\ et\ [CF]$ sont perpendiculaire à la diagonale $[BD]$.
DETERMINE le périmètre du parallélogramme *AECF.*

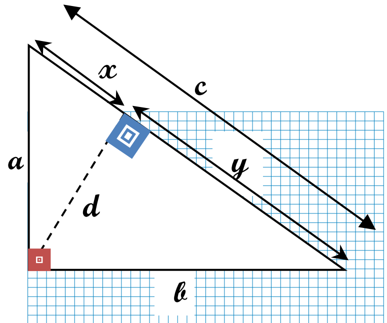


Série 7 : **COMPLETE** le tableau avec les valeurs exactes.

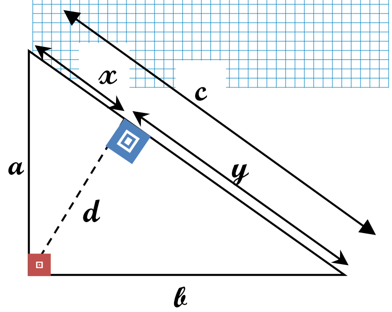


	a	**b**	**c**	**d**	x	y
1°)			7		2	
2°)				4		6
3°)	3	5				
4°)	5		9			
5°)		5		2		

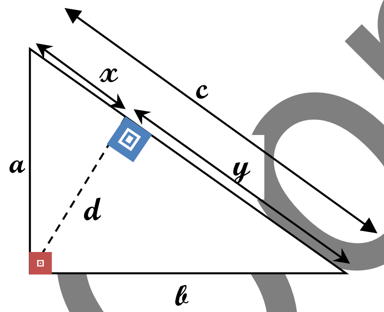




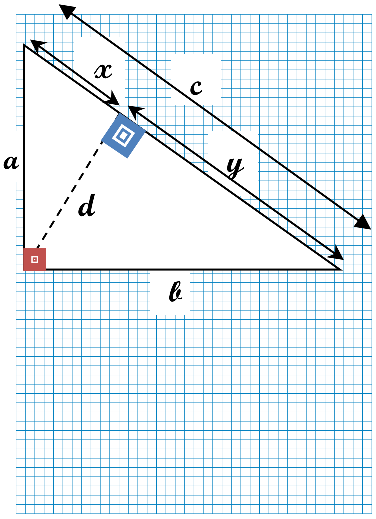
	a	b	c	d	x	y
Ex 2				4		6



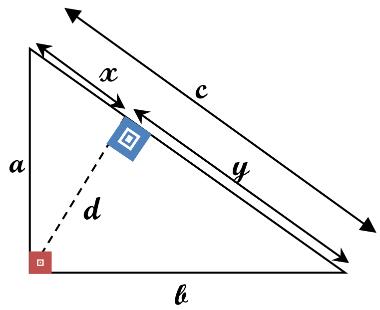
	a	b	c	d	x	y
Ex 3	3	5				



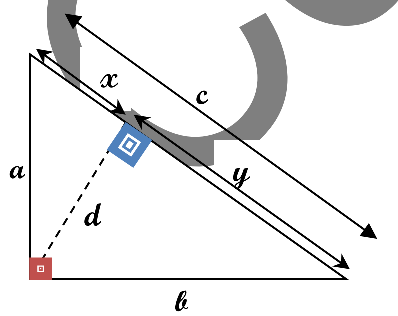
	a	b	c	d	x	y
Ex 4	5		9			



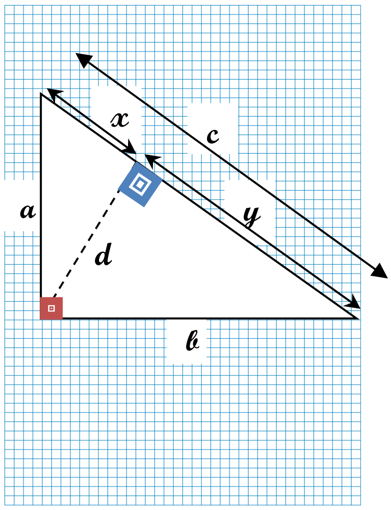
	a	b	c	d	x	y
5		5		2		



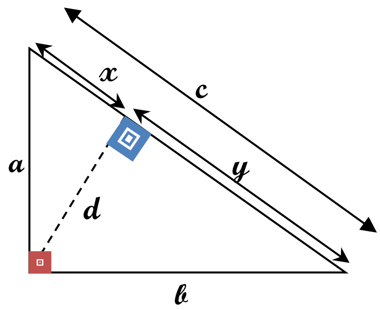
	a	b	c	d	x	y
Ex 6	6				4	
Ex 7		7				5
Ex 8			8			6
Ex 9					3	5
Ex 10				5	3	



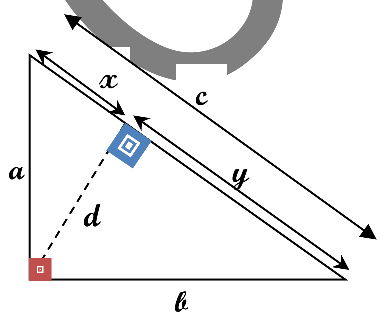
	a	b	c	d	x	y
Ex 7		7				5



	a	b	c	d	x	y
Ex 8			8			6



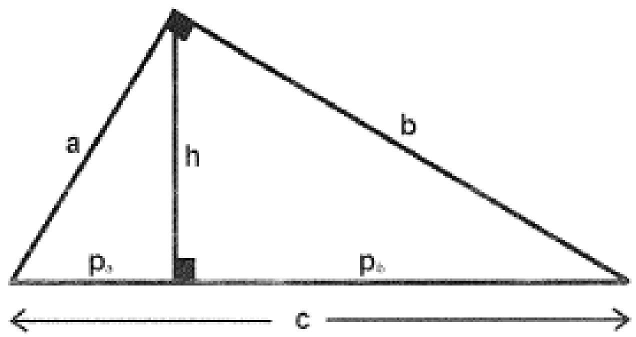
	a	b	c	d	x	y
Ex 9					3	5



	a	b	c	d	x	y
Ex 10				5	3	

SYNTHÈSE

relations métriques...dans le triangle rectangle



a : petite cathète
b : grande cathète
c : hypoténuse
p_a : projection orthogonale de a
p_b : projection orthogonale de b
h : hauteur issue de l'angle droit

Dans des triangles semblables, les côtés homologues sont proportionnels.

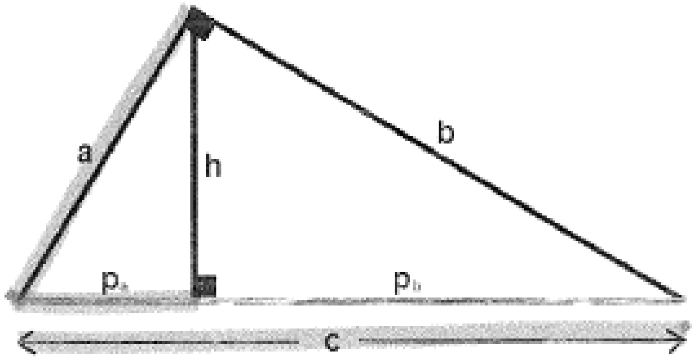
Ne pas oublier la relation de Pythagore : $\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$

Triangles	Rapport des hypoténuses		Rapport des grandes cathètes		Rapport des petites cathètes	Relation métrique (formule)	Relation métrique (mots)
GROS Δ / MOYEN Δ	$\frac{c}{b}$	=	$\frac{b}{p_b}$	=	$\frac{a}{h}$	$b^2 = p_b \cdot c$	Dans un Δ ▭, chaque cathète est moyenne proportionnelle entre la longueur de sa projection sur l'hypoténuse et l'hypoténuse entière.
GROS Δ / PETIT Δ	$\frac{c}{a}$	=	$\frac{b}{h}$	=	$\frac{a}{p_a}$	$a^2 = p_a \cdot c$	
MOYEN Δ / PETIT Δ	$\frac{b}{a}$	=	$\frac{p_b}{h}$	=	$\frac{h}{p_a}$	$h^2 = p_a \cdot p_b$	Dans un Δ ▭, la hauteur issue du sommet de l'angle droit est MOYENNE PROPORTIONNELLE entre les mesures des 2 segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.

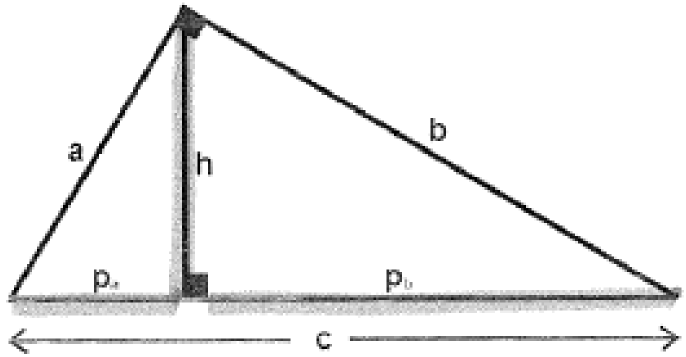
Aire Δ rectangle (façon 1)	Aire Δ rectangle (façon 2)	Découverte de la relation	Relation métrique	Relation métrique (mots)
$A = \frac{c \cdot h}{2}$	$A = \frac{a \cdot b}{2}$	$\frac{c \cdot h}{2} = \frac{a \cdot b}{2}$	$a \cdot b = c \cdot h$	Dans un Δ ▭, le produit des cathètes est égal au produit de la hauteur issue de l'angle droit par l'hypoténuse.

SYNTHÈSE

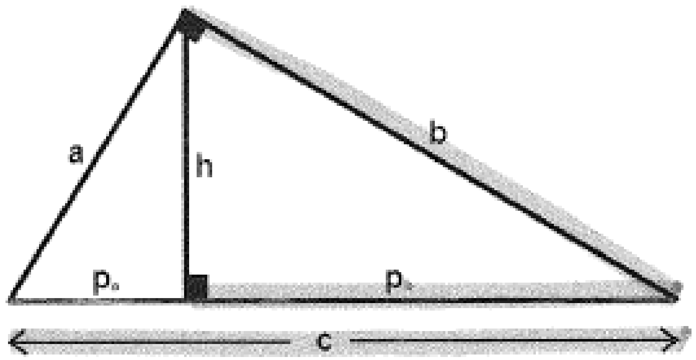
Les relations métriques en résumé



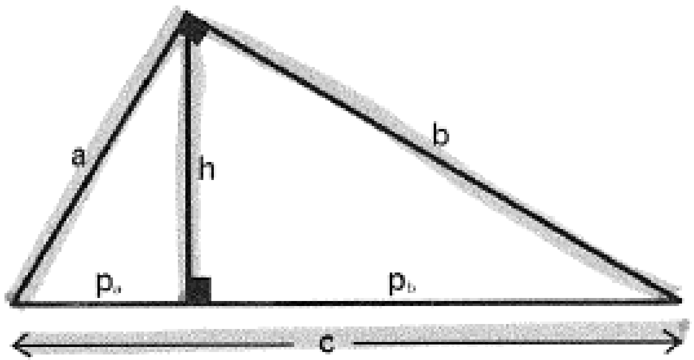
$$a^2 = p_a \cdot c$$



$$h^2 = p_a \cdot p_b$$



$$b^2 = p_b \cdot c$$



$$a \cdot b = h \cdot c$$

UTILISER LE THÉORÈME DE PYTHAGORE

Le théorème

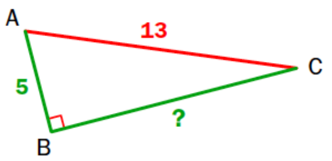
Ce qu'il dit

SI		ALORS
ABC est rectangle en **B**.	→	$\lvert BA\rvert^2 + \lvert BC\rvert^2 = \lvert AC\rvert^2$

Dans un triangle rectangle, le carré de l'**hypoténuse** est égal à la somme des carrés des **côtés de l'angle droit**.

À quoi il sert

À calculer une longueur dans un triangle rectangle.



La réciproque

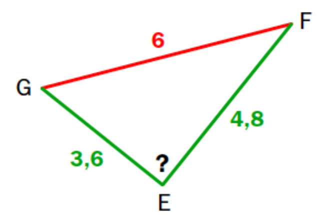
Ce qu'elle dit

SI		ALORS
$\lvert EF\rvert^2 + \lvert EG\rvert^2 = \lvert FG\rvert^2$	→	EFG est un triangle rectangle en **E**.

Si, dans un triangle, le carré du **plus grand côté** est égal à la somme des carrés des **deux autres côtés**, alors ce triangle est rectangle. Le plus grand côté est l'hypoténuse.

À quoi elle sert

À déterminer si un triangle est rectangle.

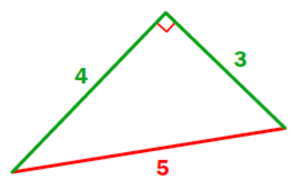


Carrés parfaits

Quelques carrés parfaits

$1^2 = 1$	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$
$5^2 = 25$	$6^2 = 36$	$7^2 = 49$	$8^2 = 64$
$9^2 = 81$	$10^2 = 100$	$11^2 = 121$	$12^2 = 144$

Triangle de Pythagore



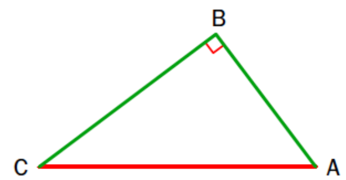
Longueurs : 3 ; 4 ; 5.

Vocabulaire

Dans un triangle rectangle :
plus grand côté = **hypoténuse**.

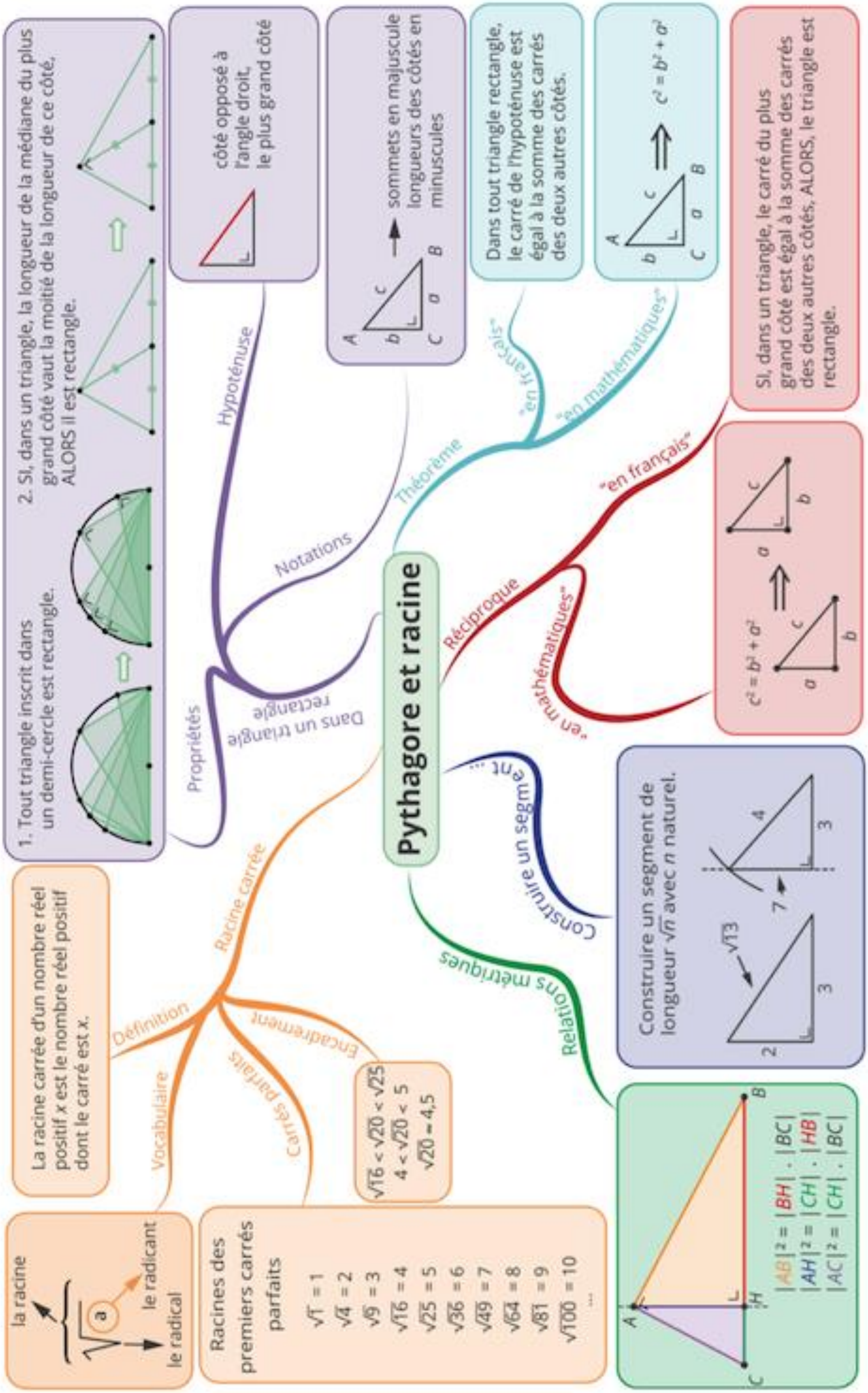
Exemple

Dans le triangle ABC rectangle en **B**, l'hypoténuse est [**AC**].
[**BA**] et [**BC**] sont les côtés de l'angle droit.



....

	Formule
Diagonale *d* d'un carré de côté *c*	$c\sqrt{2}$
Diagonale *d* d'un cube d'arête *a*	$c\sqrt{3}$
Hauteur *h* d'un triangle équilatéral de côté *a*	$c\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



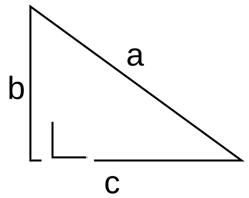
Pythagore et racine
Propriétés
Dans un triangle rectangle
1. Tout triangle inscrit dans un demi-cercle est rectangle.
2. SI, dans un triangle, la longueur de la médiane du plus grand côté vaut la moitié de la longueur de ce côté, ALORS il est rectangle.
Hypoténuse
côté opposé à l'angle droit, le plus grand côté
Notations
sommets en majuscule longueurs des côtés en minuscules
Théorème
"en français"
Dans tout triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.
"en mathématiques"
$c^2 = b^2 + a^2$
Réciproque
"en français"
SI, dans un triangle, le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, ALORS, le triangle est rectangle.
"en mathématiques"
$c^2 = b^2 + a^2$
Construire un segment ...
Construire un segment de longueur $\sqrt{n}$ avec n naturel.
$\sqrt{13}$
Relations métriques
$|AB|^2 = |BH| \cdot |BC|$
$|AH|^2 = |CH| \cdot |HB|$
$|AC|^2 = |CH| \cdot |BC|$
Racine carrée
Définition
La racine carrée d'un nombre réel positif x est le nombre réel positif dont le carré est x.
Vocabulaire
la racine
le radicant
le radical
Carrés parfaits
Racines des premiers carrés parfaits
$\sqrt{1} = 1$
$\sqrt{4} = 2$
$\sqrt{9} = 3$
$\sqrt{16} = 4$
$\sqrt{25} = 5$
$\sqrt{36} = 6$
$\sqrt{49} = 7$
$\sqrt{64} = 8$
$\sqrt{81} = 9$
$\sqrt{100} = 10$
...
Encadrement
$\sqrt{16} < \sqrt{20} < \sqrt{25}$
$4 < \sqrt{20} < 5$
$\sqrt{20} \approx 4,5$

Le petit curieux Mathématiques

D. Faisons le point

1) Théorème de Pythagore

Si



alors

$a^2 = b^2 + c^2$ ....

$b^2 = a^2 - c^2$ ....

$c^2 = a^2 - b^2$ ....

Dans tout triangle rectangle,

le carré de la longueur de. .l'hypoténuse est égal à

la somme des carrés des longueurs .des deux autres côtés..

2) Réciproque du théorème de Pythagore

Si, dans un triangle,

le carré de la longueur d'un côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés

alors le triangle est rectangle.

3) Formules particulière

La diagonale d'un carré de côté c mesure $c\sqrt{2}.$ ou $\sqrt{2}.c$.................................

La diagonale d'un cube de côté c mesure $c\sqrt{3}.$ ou $\sqrt{3}.c$.................................

La hauteur d'un triangle équilatéral de côté c mesure $\frac{\sqrt{3}.}{2}c$ ....

4) Longueur d'un segment dans un plan cartésien orthonormé

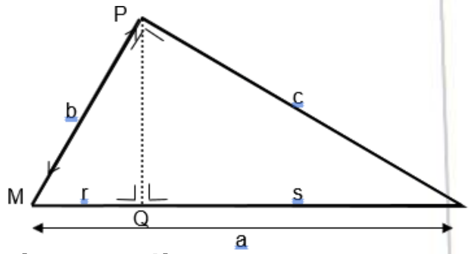
Soit $A\ (x_A\ ;\ y_A)$ et $B\ (x_B\ ;\ y_B)$ dans un repère orthonormé

alors $|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

5) Relations métriques dans le triangle rectangle

Dans tout triangle rectangle,

- **le carré de la hauteur relative à l'hypoténuse est égal au produit des longueurs des segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse :** $h^2 = r \cdot s$



- **le carré d'un côté de l'angle droit est égal au produit de sa projection sur l'hypoténuse par l'hypoténuse entière**
  $b^2 = r \cdot a \quad et\ c^2 = s \cdot a$

- $h \cdot a = b \cdot c$