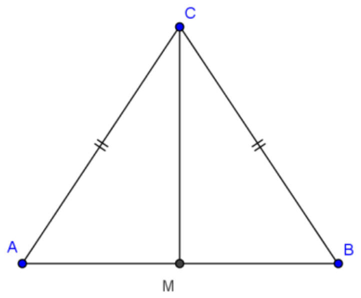
Corrigé des démonstrations

I) Démontre que dans tout triangle isocèle, les angles opposés aux côtés de même longueur ont la même amplitude.



<u>Hypothèse</u> : Le triangle ABC est isocèle en C.

<u>Thèse</u> : Â = B̂.

<u>Démonstration</u> : Construisons le segment passant par C et par M le milieu de [AB].

- Considérons les triangles MCB et MCA, ils ont :

C - $\overline{BC}$ = $\overline{AC}$ car par hypothèse ABC est un triangle isocèle.

C- $\overline{AM}$ = $\overline{MB}$ car M est le milieu du segment [AB].

C- $\overline{CM}$ = $\overline{CM}$ car [CM] est un côté commun aux deux triangles.

=> ΔMCB iso ΔMCA car si deux triangles ont leurs côtés respectivement de même longueur, alors ceux-ci sont isométriques.

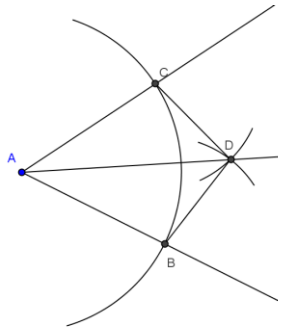
=> Â = B̂ car les angles homologues de deux triangles isométriques ont la même amplitude.

II) Soit un angle de sommet A :

a) Trace un arc de cercle dont le centre est le point A et nomme B et C les points d'intersection entre cet arc de cercle et les demis droites de l'angle Â.

b) En prenant B et C comme centre trace deux arc de cercle sécant de même rayon et nomme D l'intersection de ces deux arcs.

c) Trace la demi-droite [AD, démontre que [AD est la bissectrice de l'angle $\widehat{\mathbf{BAC}}$



<u>Hypothèse</u> : l'angle $\widehat{ABC}$

[AB] et [AC] sont des rayons du cercle de centre A

$\overline{BD}$ = $\overline{CD}$

<u>Thèse</u> : $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

<u>Démonstration</u> : Considérons les triangles ABD et ACD, ils ont :

C - $\overline{BD}$ = $\overline{CD}$ par hypothèse

C- $\overline{AD}$ = $\overline{AD}$ car [AD] est un coté commun aux deux triangles.

C- $\overline{AB}$ = $\overline{AC}$ car ce sont les rayons du cercle de centre A.

=> ΔABD iso ΔACD car si deux triangles ont leurs côtés respectivement de même longueur, alors ceux-ci sont isométriques.

=> $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ car les angles homologues de deux triangles isométriques ont la même amplitude.

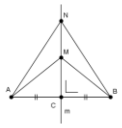
III) Démontre que si M et N sont deux points de la médiatrice m du segment [AB] alors le triangle NAM est isométrique au triangle NBM.

Hypothèse : |AC| = |CB|.

m $\perp$ [AB].

M et N appartiennent à la médiatrice m du segment [AB].

Thèse : Δ ANM iso Δ BNM.



Démonstration :

Considérons les triangles ANM et BNM, ils ont :

C - $\overline{NM}$ = $\overline{NM}$ car [NM] est un côté commun aux deux triangles.

C- $\overline{AM}$ = $\overline{MB}$ car tout point de la médiatrice d'un segment est équidistant des extrémités de celui-ci.

C- $\overline{AN}$ = $\overline{BN}$ car tout point de la médiatrice d'un segment est équidistant des extrémités de celui-ci.

=> Δ ANM iso Δ BNM car si deux triangles ont leurs côtés respectivement de même longueur, alors ceux-ci sont isométriques.

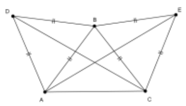
IV) Sur les côtés [AB] et [CB] d'un triangle isocèle en B, on construit extérieurement deux triangles ABD et CBE équilatéraux :

a) Démontre que les triangles ADC et CAE sont isométriques.

Hypothèse : ABC est un triangle isocèle en B.

BAD et BCE sont des triangles équilatéraux.

Thèse : ΔADC iso ΔCEA



Démonstration :

Considérons les triangles ADC et CEA, ils ont :

C - $\overline{DA}$ = $\overline{EC}$ car $\overline{AD}$ = $\overline{AB}$ comme ce sont des côtés du triangle équilatéral BAD et $\overline{CE}$ = $\overline{CB}$ car ce sont des côtés du triangle équilatéral CEB or $\overline{AB}$ = $\overline{CB}$ car ABC est un triangle isocèle en B donc $\overline{DA}$ = $\overline{EC}$

A- $\widehat{CAD}$ = $\widehat{ACE}$ car $\widehat{CAD}$ = $\widehat{CAB}$ + 60° et $\widehat{ACE}$ = $\widehat{ACB}$ + 60° or $\widehat{CAB}$ = $\widehat{ACB}$ car les angles à la base d'un triangle isocèle sont de même amplitude donc $\widehat{CAD}$ = $\widehat{ACE}$

C- $\overline{AC}$ = $\overline{CA}$ car [AC] est un côté commun aux deux triangles.

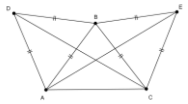
=> $\Delta ADC\ iso\ \Delta CEA$ car si deux triangles ont un angle de même amplitude adjacent à deux côtés respectivement de même longueur, alors ceux-ci sont isométriques.

b) En te servant de a) démontre que les triangles BDC et ABE sont isométriques.

Hypothèse : ABC est un triangle isocèle en B.

BAD et BCE sont des triangles équilatéraux.

Thèse : ΔBDC iso ΔBEA



Démonstration :
Considérons les triangles BDC et BEA, ils ont :

C - $\overline{BD}$ = $\overline{BE}$ car car $\overline{AB}$ = $\overline{DB}$ comme ce sont des côtés du triangle équilatéral BAD et $\overline{BE}$ = $\overline{CB}$ car ce sont des côtés du triangle équilatéral CEB or $\overline{AB}$ = $\overline{CB}$ car ABC est un triangle isocèle en B donc $\overline{BD} = \overline{BE}.$

C- $\overline{BC}$ = $\overline{AB}$ car ABC est un triangle isocèle en A.

C- $\overline{DC}$ = $\overline{EA}$ car $\Delta ADC\ iso\ \Delta CEA$ et que les côté homologues de deux triangles isométriques sont de même longueur.

=> ΔBDC iso ΔBEA car si deux triangles ont leurs côtés respectivement de même longueur, alors ceux-ci sont isométriques.

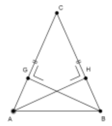
V) Démontre que les hauteurs relatives aux côtés de même longueur, d'un triangle isocèle, ont même longueur.

Hypothèse :[AH] est la hauteur relative au côté [BC]

[BC] est la hauteur relative au côté [AC]

ABC est un triangle isocèle en C.

Thèse :$\overline{AH}$= $\overline{GB}$



Démonstration :
Considérons les triangles CBG et CAH, ils ont :

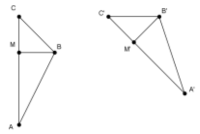
H- $\overline{CA}$ = $\overline{CB}$ car ABC est un triangle isocèle en C.

A- Ĉ = Ĉ car Ĉ est un angle commun aux deux triangles.

=> ΔBDC iso ΔBEA car si deux triangles rectangles ont leur hypoténuse de même longueur et un des deux angles aigües de même amplitude, alors ceux-ci sont isométriques.

=> $\overline{AH}$= $\overline{GB}$ car les côtés homologues de deux triangles isométriques sont de même longueur.

VI) Si deux triangles sont isométriques les hauteurs relatives à deux côtés homologues ont même longueur. Démontre.



<u>Hypothèse</u> : $\overline{CA}$ = $\overline{C'A'}$, $\overline{CB}$ = $\overline{C'B'}$, $\overline{AB}$ = $\overline{A'B'}$

Â = Â', Ĉ = Ĉ', B̂ = B̂'

[MB] ⊥ [CA] et [M'B'] ⊥ [C'A']

<u>Thèse</u> : $\overline{MB}$ = $\overline{M'B'}$

<u>Démonstration</u> :

Considérons les triangles MBA et M'B'A', ils ont :

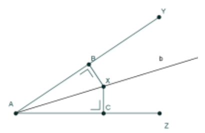
H- $\overline{BA}$ = $\overline{B'A'}$ car par hypothèse : ΔABC iso ΔA'B'C' et que les côtés homologues de deux triangles isométriques sont respectivement de même longueur.

A- Â =Â ' car par hypothèse : ΔABC iso ΔA'B'C' et que les angles homologues de deux triangles isométriques sont respectivement de même amplitude.

=> ΔMBA iso ΔM'B'A' car si deux triangles rectangles ont leur hypoténuse de même longueur et un des deux angles aigus de même amplitude, alors ceux-ci sont isométriques.

=> $\overline{MB}$= $\overline{M'B'}$ car les côtés homologues de deux triangles isométriques sont de même longueur.

VII) Démontre que tout point de la bissectrice d'un angle est équidistant aux côtés de cet angle.



<u>Hypothèse</u> : b est la bissectrice de $\widehat{YAZ}$

Le point X appartient à la bissectrice b.

B et C sont respectivement les pieds des perpendiculaires aux demi-droites [AY et [AZ issu du point X.

<u>Thèse</u> : $\overline{BX}$ = $\overline{CX}$

<u>Démonstration</u> :

ABX est un triangle rectangle en B car la distance d'un point à une droite est la distance de ce point au pied de la perpendiculaire à cette droite issue de ce point.

ACX est un triangle rectangle en C car la distance d'un point à une droite est la distance de ce point au pied de la perpendiculaire à cette droite issue de ce point.

Considérons les triangles ABX et ACX, ils ont :

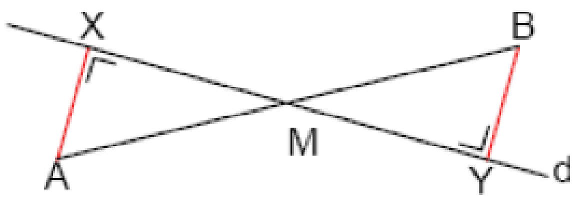
H- AX = AX car [AX] est un côté commun aux deux triangles.

A- $\hat{A}_1$ = $\hat{A}_2$ car b est la bissectrice de l'angle Â.

=> ΔABX iso ΔACX car si deux triangles rectangles ont leur hypoténuse de même longueur et un des deux angles aigus de même amplitude, alors ceux-ci sont isométriques.

=> $\overline{BX}$= $\overline{CX}$ car les côtés homologues de deux triangles isométriques sont de même longueur.

VIII) Par le milieu M d'un segment [AB], on mène une droite d sécante à [AB]. Démontre que la distance du point A à la droite d est égale à la distance du point B à la droite d.



Hypothèse : Le point M est le milieu de [AB]

La droite d est sécante à [AB]

M appartient à la droite d

Thèse : la distance du point A à la droite d est égale à la distance du point B à la droite d

Démonstration :

X est le pied de la perpendiculaire à d issue du point A.

Y est le pied de la perpendiculaire à d issue du point B.

Considérons les triangles AMX et BMY, ils ont :

H- $\overline{AM} = \overline{MB}$ car le point M est le milieu de [AB]

A- $\widehat{AMX} = \widehat{BMY}$ car ce sont des angles opposés par le sommet.

=> ΔAMX iso ΔBMY car si deux triangles rectangles ont leur hypoténuse de même longueur et un des deux angles aigus de même amplitude, alors ceux-ci sont isométriques.

=> $\overline{BY} = \overline{AX}$ car les côtés homologues de deux triangles isométriques sont de même longueur.

IX) ABC est un triangle rectangle en A, les point M,N et P sont respectivement les milieux de [BC], [AC] et [AB]. Prouve que les triangles BMP, PNA, MPN et NCM sont isométriques.

Hypothèse :ABC est un triangle rectangle en A

M est le milieu de [BC]

N est le milieu de [AC]

P est le milieu de [AB]

Thèse : (1) ΔBMP iso ΔPNA

(2) ΔBMP iso ΔMCN

(3) ΔBMP iso ΔNPM

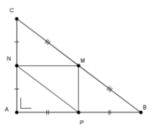
Démonstration :

On sait que BC // NP, AB // NM, AC // MP car la droite passant par les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au 3ème côté.

(1) Considérons les triangles BMP et PNA, ils ont :

A- $\widehat{MBP}$ = $\widehat{NPA}$ car ce sont des angles correspondants déterminés par les droite parallèle MB et NP et par la sécante PB.

H- $\overline{BM}$ = $\overline{PN}$ car la longueur du segment dont les extrémités sont les milieux de deux côtés consécutifs d'un triangle est égale à la moitié de la longueur du troisième côté.

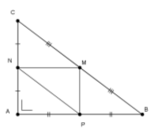


=> ΔBMP iso ΔPNA car si deux triangles rectangles ont leur hypoténuse de même longueur et un des deux angles aigus de même amplitude, alors ceux-ci sont isométriques.

(2) Considérons les triangles BMP et MNC, ils ont :

A-$\widehat{MBP}$ = $\widehat{CMN}$ car ce sont des angles correspondants déterminés par les droite parallèle MN et PB et par la sécante BM.

H- $\overline{BM}$ = $\overline{MC}$ car le point M est le milieu de [BC]

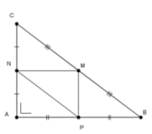


=> ΔBMP iso ΔMNC car si deux triangles rectangles ont leur hypoténuse de même longueur et un des deux angles aigus de même amplitude, alors ceux-ci sont isométriques.

(3) Considérons les triangles BMP et NPM, ils ont :

H- $\overline{MP}$ = $\overline{PM}$ car [MP] est un côté commun aux deux triangles.

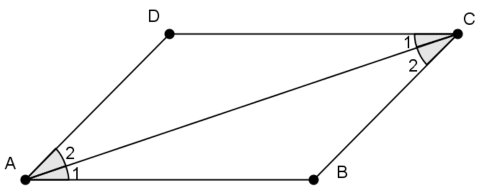
C- $\overline{MB}$ = $\overline{PN}$ car la longueur du segment dont les extrémités sont les milieux de deux côtés consécutifs d'un triangle est égale à la moitié de la longueur du troisième côté.



=> Δ BMP iso Δ NPM car si deux triangles rectangles ont leur hypoténuse et un des côté de l'angle droit de même longueur, alors ceux-ci sont isométriques.

=> ΔBMP iso ΔPNA iso ΔMCN iso ΔNPM

X) Démontre que les côtés opposés d'un parallélogramme ont même longueur.



Hypothèse : ABCD est un parallélogramme

Thèse : $\overline{AB}$ = $\overline{CD}$ et $\overline{AD}$ = $\overline{BC}$

Démonstration :

Construisons la diagonale [AC].

Considérons les triangles ABC et CDA, ils ont :

C- $\overline{AC}$ = $\overline{AC}$ car [AC] est un côté commun aux deux triangles.

A- $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$ car ce sont des angles alternes-internes formés par la sécante [AC] et les droites parallèles AB et DC.

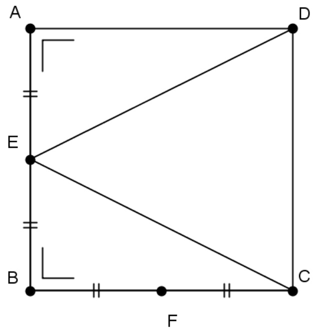
A- $\hat{A}_2 = \hat{C}_2$ car ce sont des angles alternes-internes formés par la sécante [AC] et les droites parallèles BC et AD.

=> Δ ABC iso Δ CDA car si deux triangles ont un côté de même longueur adjacent à deux angles respectivement de même amplitude, alors ils sont isométriques.

=> $\overline{AD}$ = $\overline{BC}$ et $\overline{AB}$ = $\overline{DC}$ car les côtés homologues de deux triangles isométriques sont de même longueur.

XI) ABCD est un carré. E et F sont les milieux respectifs des côtés [AB] et [BC]

a) Démontre que les triangles EAD et EBC sont isométriques.



Hypothèse : ABCD est un carré.

E est le milieu de [AB]

F est le milieu de [BC]

Thèse : ΔEAD iso ΔEBC

Démonstration :

Considérons les triangles EAD et EBC, ils ont :

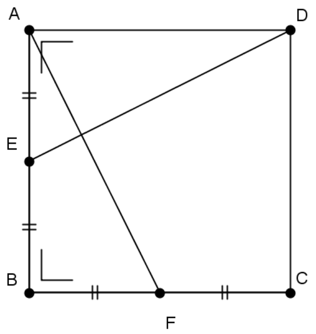
C- $\overline{AE}$ = $\overline{EB}$ car E est le milieu de [AB].

A- Â = B̂ Car ce sont des angles droits du carré ABCD.

C- $\overline{AD}$ = $\overline{BC}$ car ce sont des côtés du carré ABCD.

$=> \Delta EAD\ iso\ \Delta EBC$ car si deux triangles ont un angle de même amplitude adjacent à deux côtés respectivement de même longueur, alors ceux-ci sont isométriques.

b) Démontre que les triangles ABF et DAE sont isométrique.



Hypothèse : ABCD est un carré.

E est le milieu de [AB]

F est le milieu de [BC]

Thèse : ΔDAE iso ΔABF

Démonstration :

Considérons les triangles DAE et ABF, ils ont :

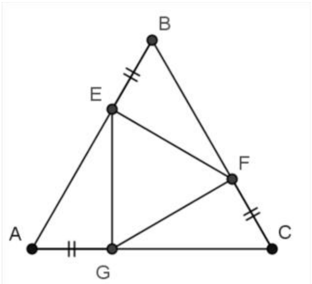
C- $\overline{DA}$ = $\overline{AB}$ car ce sont des côtés du carré ABCD.

A- Â = B̂ Car ce sont des angles droits du carré ABCD.

C- $\overline{AE}$ = $\overline{BF}$ car $\overline{AE}$ = $\frac{1}{2}\overline{AB}$ comme E est le milieu de [AB] et $\overline{BF}$ = $\frac{1}{2}\overline{BC}$ comme F est le milieu de [BC], or [AB] et [BC] sont deux côtés du carré ABCD, donc $\overline{AB}$ = $\overline{BC}$, donc $\overline{AE}$ = $\overline{BF}$.

$=> \Delta DAE\ iso\ \Delta ABF$ car si deux triangles ont un angle de même amplitude adjacent à deux côtés respectivement de même longueur, alors ceux-ci sont isométriques.

XII) EFG est un triangle inscrit dans un triangle équilatéral ABC tel que $\overline{AG} = \overline{BE} = \overline{CF}$ comme le montre la figure ci-dessous. Démontre que le triangle EFG est également équilatéral.



<u>Hypothèse</u> : ABC est un triangle est équilatéral

$\overline{AG}$ = $\overline{EB}$ = $\overline{FC}$

<u>Thèse</u> : $\overline{FG}$ = $\overline{EF}$ = $\overline{GE}$ (EFG est un triangle équilatéral)

<u>Démonstration</u> :

Considérons les triangles AEG et BFE, ils ont :

C- $\overline{AG}$ = $\overline{EB}$ par hypothèse.

A- Â = B̂ car les angles d'un triangle équilatéral ont une amplitude de 60°.

C- $\overline{BF}$ = $\overline{AE}$ car $\overline{BF}$ = $\overline{BC} - \overline{FC}$ et $\overline{AE}$ = $\overline{BA}$- $\overline{EB}$ or $\overline{BC}$ = $\overline{BA}$ et $\overline{FC}$ = $\overline{BE}$ donc $\overline{BF}$ = $\overline{AE}$

$=> \Delta AEG\ iso\ \Delta BFE$ car si deux triangles ont un angle de même amplitude adjacent à deux côtés respectivement de même longueur, alors ceux-ci sont isométriques.

Considérons les triangles AEG et CGF, ils ont :

C- $\overline{AG}$ = $\overline{FC}$ par hypothèse.

A- Â = Ĉ car les angles d'un triangle équilatéral ont une amplitude de 60°.

C- $\overline{CG}$ = $\overline{AE}$ car $\overline{CG}$ = $\overline{AC} - \overline{AG}$ et $\overline{AE}$ = $\overline{BA}$- $\overline{EB}$ or $\overline{AC}$ = $\overline{BA}$ et $\overline{AG}$ = $\overline{BE}$ donc $\overline{CG}$ = $\overline{AE}$

$=> \Delta AEG\ iso\ \Delta CGF$ car si deux triangles ont un angle de même amplitude adjacent à deux côtés respectivement de même longueur, alors ceux-ci sont isométriques.

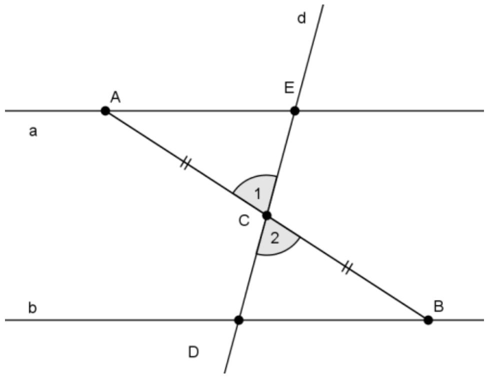
$=> \Delta AEG\ iso\ \Delta BFE\ iso\ \Delta CGF$

$=>$: $\overline{FG}$ = $\overline{EF}$ = $\overline{GE}$ car les côtés homologues de deux triangles isométriques sont de même longueur.

$=>$ Le triangle EFG est équilatéral.

XIII) Trace a et b, deux droites parallèles. Place un point A sur la droite a et un point B sur la droite b. C est le milieu de [AB]. Par C, trace une droite d qui coupe a en D et b en E.

Démontre que C est aussi le milieu du segment [DE].



Hypothèse : a // b

C est le milieu de [AB].

Le point D appartient à la droite a et à la droite d.

Le point E appartient à la droite b et à la droite d.

Thèse : $\overline{DC} = \overline{CE}$

Démonstration :

Considérons les triangles ACD et BCE, ils ont :

A-$\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ car ce sont deux angles opposés par le sommet.

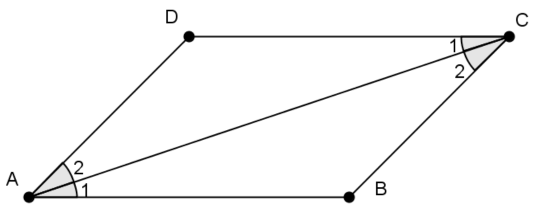
C-$\overline{AC} = \overline{CB}$ car C est le milieu de [AB]

A- $\hat{A} = \hat{B}$ car ce sont des angles alternes-internes formés par la sécante AB et les droites parallèles a et b.

=> Δ ACD iso Δ BCE car si deux triangles ont un côté de même longueur adjacent à deux angles respectivement de même amplitude, alors ils sont isométriques.

=> : $\overline{DC} = \overline{CE}$ car les côtés homologues de deux triangles isométriques sont de même longueur.

XIV) Démontre que dans tout parallélogramme, une diagonale détermine deux triangles isométriques.



Hypothèse : ABCD est un parallélogramme.

[AC] est une diagonale de ABCD.

Thèse : ΔADC iso ΔCBA

Démonstration :

Considérons les triangles ADC et CBA, ils ont :

C- $\overline{AC} = \overline{CA}$ car [AC] est un côté commun aux deux triangles.

A- $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$ car ce sont des angles alternes-internes formés par la sécante AC et les droites parallèles AB et DC

A- $\hat{A}_2 = \hat{C}_2$ car ce sont des angles alternes-internes formés par la sécante AC et les droite parallèles DA et CB.

=> Δ ADC iso Δ CBA car si deux triangles ont un côté de même longueur adjacent à deux angles respectivement de même amplitude, alors ils sont isométriques.

XV) Dans un parallélogramme, trace les diagonales. Découvre les paires de triangle isométriques et démontre.

(1) ΔDOC iso Δ BOA

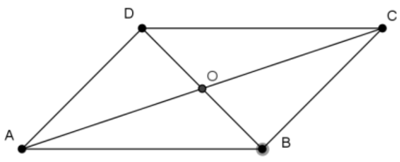
(2) ΔCOB iso ΔAOD

(3) ΔDCA iso ΔBAC

(4) ΔDBA iso ΔBDC

<u>Hypothèse</u> : ABCD est un parallélogramme.

[AC] et [BD] sont les diagonales de ABCD.



(1) <u>Thèse</u> : ΔDOC iso Δ BOA

<u>Démonstration :</u>

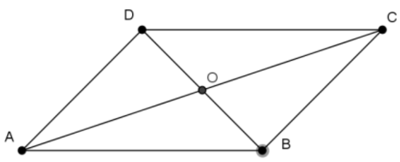
Considérons les triangles DOC et BOA , ils ont :

C- $\overline{DC} = \overline{AB}$ car les côtés opposés d'un parallélogramme ont la même longueur.

A- $\widehat{DCO} = \widehat{BAO}$ car ce sont des angles alternes-internes formés par la sécante AC et les droites parallèles AB et DC.

A-$\widehat{CDO} = \widehat{ABO}$ car ce sont des angles alternes-internes formés par la sécante BD et les droites parallèles AB et DC

=> Δ DOC iso Δ BOA car si deux triangles ont un côté de même longueur adjacent à deux angles respectivement de même amplitude, alors ils sont isométriques.



<u>(2) Thèse</u> : ΔCOB iso ΔAOD

<u>Démonstration</u> :

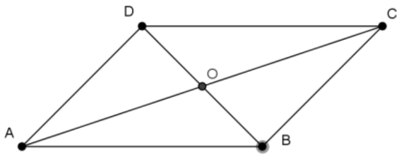
Considérons les triangles COB et AOD, ils ont :

C-$\overline{CB} = \overline{DA}$ car les côtés opposés d'un parallélogramme ont la même longueur.

A-DAO = BCO car ce sont des angles alternes-internes formés par la sécante AC et les droites parallèles CB et DA.

A- $\widehat{ADO} = \widehat{CBO}$ car ce sont des angles alternes-internes formés par la sécante BD et les droites parallèles AD et BC

=> Δ COB iso Δ AOD car si deux triangles ont un côté de même longueur adjacent à deux angles respectivement de même amplitude, alors ils sont isométriques.



(3) <u>Thèse</u> : ΔDCA iso ΔBAC

<u>Démonstration</u> :

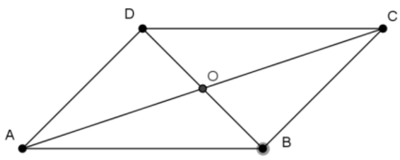
Considérons les triangles DCA et BAC, ils ont :

C- $\overline{AC} = \overline{CA}$ car [AC] est un côté commun aux deux triangles.

A-$\widehat{BAC} = \widehat{DCA}$ car ce sont des angles alternes-internes formés par la sécante AC et les droites parallèles AB et DC

A- $\widehat{DAC} = \widehat{BCA}$ car ce sont des angles alternes-internes formés par la sécante AC et les droite parallèles DA et CB.

=> Δ DCA iso Δ BAC car si deux triangles ont un côté de même longueur adjacent à deux angles respectivement de même amplitude, alors ils sont isométriques.



<u>(4) Thèse</u> : ΔDBA iso ΔBDC

<u>Démonstration</u> :

Considérons les triangles DBA et BDC, ils ont :

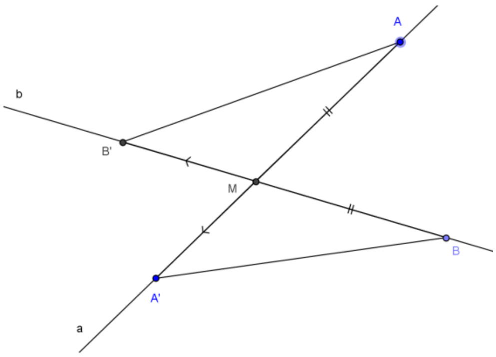
C- $\overline{DB} = \overline{BD}$ car [BD] est un côté commun aux deux triangles.

A- $\widehat{CDB} = \widehat{ABD}$ car ce sont des angles alternes-internes formés par la sécante BD et les droites parallèles AB et DC

A-$\widehat{CBD} = \widehat{ADB}$ car ce sont des angles alternes-internes formés par la sécante BD et les droite parallèles DA et CB.

=> Δ DBA iso Δ BDC car si deux triangles ont un côté de même longueur adjacent à deux angles respectivement de même amplitude, alors ils sont isométriques.

XVI) Les rues a et b se coupent au carrefour M en rase campagne. Les poteaux téléphoniques A et B sont à égale distance de M ainsi que A' et B'. La régie doit relier les poteaux A et B' et B et A'. Compare la longueur du fil entre A et B' et entre A' et B. Justifie par une démonstration.



Hypothèse : M est le point d'intersection des droites a et b

$\overline{B'M}$ = $\overline{A'M}$ et $\overline{AM}$ = $\overline{BM}$

Thèse : $\overline{B'A}$ = $\overline{A'B}$

Démonstration :

Considérons les triangles AMB' et BMA' ils ont :

C- $\overline{B'M}$ = $\overline{A'M}$ par hypothèse.

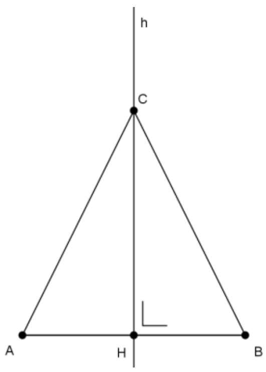
A- $\widehat{B'MA}$ = $\widehat{A'MB}$ car ce sont des angles opposés par le sommet.

C- $\overline{AM}$ = $\overline{BM}$ par hypothèse.

=> $\Delta AMB'\ iso\ \Delta BMA'$ car si deux triangles ont un angle de même amplitude adjacent à deux côtés respectivement de même longueur, alors ceux-ci sont isométriques.

=> $\overline{B'A}$ = $\overline{A'B}$ car les côtés homologues de deux triangles isométriques sont de même longueur.

XVII) Démontre que si dans un triangle, la bissectrice d'un angle est en même temps la hauteur relative au côté opposé à cet angle, alors ce triangle est isocèle.



Hypothèse : CH ⊥ AB

$\widehat{ACH}$ = $\widehat{BCH}$

Thèse : $\overline{CA}$ = $\overline{CB}$

Démonstration :

Considérons les triangles ACH et BCH, ils ont :

C- $\overline{CH}$= $\overline{CH}$ car [CH] est un côté commun aux deux triangles.

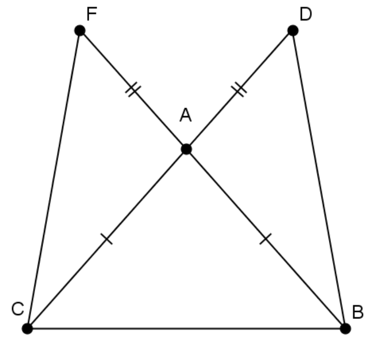
A-$\widehat{ACH}$ = $\widehat{BCH}$ car [CH est la bissectrice de l'angle Ĉ

A-$\widehat{CHA}$ = $\widehat{CHB}$ car CH ⊥ AB

=> Δ ACH iso Δ BCH car si deux triangles ont un côté de même longueur adjacent à deux angles respectivement de même amplitude, alors ils sont isométriques.

=> $\overline{CA}$ = $\overline{CB}$ car les côtés homologues de deux triangles isométriques sont de même longueur.

XVIII) Dans le triangle ABC isocèle en A, on prolonge le côté [BA] d'une distance $\overline{AF}$ et le côté [CA] d'une distance $\overline{AD}$, telle que $\overline{AF} = \overline{AD}$. Démontre que $\overline{BD} = \overline{FC}$.



Hypothèse : ABC est un triangle isocèle en A

$\overline{AF} = \overline{AD}$.

Thèse : $\overline{BD} = \overline{FC}$.

Démonstration :

Considérons les triangles AFC et ADB, ils ont :

C- $\overline{AD} = \overline{AF}$ par hypothèse.

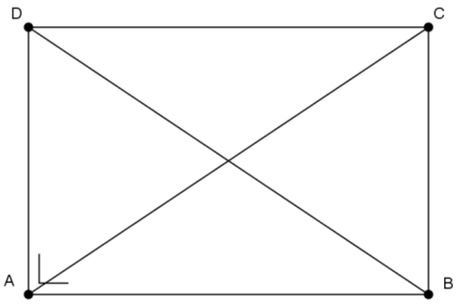
A- $\widehat{FAC} = \widehat{DAB}$ car ce sont deux angles opposés par le sommet.

C- $\overline{CA} = \overline{BA}$ car le triangle ABC est isocèle en A.

$=> \Delta AFC \ iso \ \Delta ADB$ car si deux triangles ont un angle de même amplitude adjacent à deux côtés respectivement de même longueur, alors ceux-ci sont isométriques.

$=> \overline{BD} = \overline{FC}$ car les côtés homologues de deux triangles isométriques sont de même longueur.

XIX) Démontre que les diagonales d'un rectangle ont même longueur.



Hypothèse : ABCD est un rectangle

[AC] et [BD] sont les diagonales de ABCD.

Thèse : $\overline{AC} = \overline{BD}$

Démonstration :

Considérons les triangles BCD et ADC, ils ont :

C- $\overline{DC} = \overline{CD}$ car [CD] est un côté commun aux deux triangles.

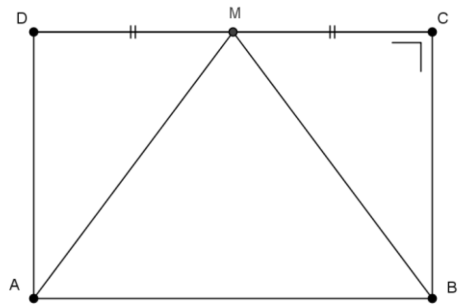
A- $\hat{D} = \hat{C}$ car ce sont deux angles droits du rectangle ABCD

C- $\overline{AD} = \overline{BC}$ car ce sont deux côtés du rectangle ABCD et que les côtés opposés d'un rectangle sont de même longueur.

$=> \Delta BCD \ iso \ \Delta ADC$ car si deux triangles ont un angle de même amplitude adjacent à deux côtés respectivement de même longueur, alors ceux-ci sont isométriques.

$=> \overline{AC} = \overline{BD}$ car les côtés homologues de deux triangles isométriques sont de même longueur.

XX) Dans le rectangle ABCD, on note M le milieu de [DC]. Démontre que le triangle AMB est isocèle en M.



Hypothèse : ABCD est un rectangle.

M est le milieu de [DC]

Thèse : $\overline{AM}$ = $\overline{MB}$

Démonstration :

Considérons les triangles ADM et BCM, ils ont :

C- $\overline{DM}$ = $\overline{MC}$ car M est le milieu de [DC].

A- $\hat{D}$ = $\hat{C}$ car ce sont deux angles droits du rectangle ABCD

C- $\overline{AD}$ = $\overline{BC}$ car ce sont deux côtés du rectangle ABCD et que les côtés opposés d'un rectangle sont de même longueur.

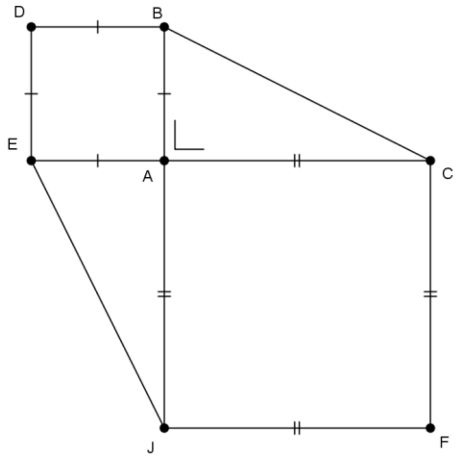
$=> \Delta ADM \; iso \; \Delta BCM$ car si deux triangles ont un angle de même amplitude adjacent à deux côtés respectivement de même longueur, alors ceux-ci sont isométriques.

$=> \overline{AM} = \overline{MB}$ car les côtés homologues de deux triangles isométriques sont de même longueur.

XXI) Construis un triangle ABC rectangle en A.

Construis ensuite les carrés AEDB et ACFJ à l'extérieur de ce triangle.

Trace [DF] et [EJ]. Cite trois paires de triangles isométriques et démontre.



(1) Δ EAJ iso Δ BAC

(2) Δ BDA iso ΔEAD

(3) ΔJAF iso ΔCFA

Hypothèse : ABC est un triangle rectangle en A.

AEDB est un carré.

ACFJ est un carré.

(1)Thèse : Δ EAJ iso Δ BAC

Démonstration :

Considérons les triangles EAJ et BAC, ils ont :

C- $\overline{AC}$ = $\overline{AJ}$ car sont des côtés du carré ACJF.

A-$\widehat{BAC}$ = $\widehat{EAJ}$ car ce sont des angles opposés par le sommet.

C-$\overline{AE}$ = $\overline{BA}$ car ce sont des côtés du carré AEDB.

$=> \Delta\ EAJ\ iso\ \Delta\ BAC$ car si deux triangles ont un angle de même amplitude adjacent à deux côtés respectivement de même longueur, alors ceux-ci sont isométriques.

(2) Thèse : Δ BDA iso ΔEAD

Démonstration :

Considérons les triangles BDA et EAD, ils ont :

H- $\overline{DA}$ = $\overline{AD}$ car [AD] est un côté commun aux deux triangles.

C- $\overline{EA}$ = $\overline{BA}$ car ce sont des côtés du carré AEDB.

=> Δ BDA iso Δ EAD car si deux triangles rectangles ont leur hypoténuse et un des côté de l'angle droit de même longueur, alors ceux-ci sont isométriques.

(3) Thèse : ΔJAF iso ΔCFA

Démonstration :

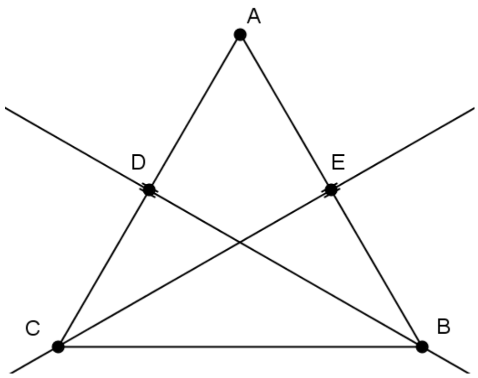
Considérons les triangles JAF et CFA, ils ont :

H- $\overline{AF}$ = $\overline{FA}$ car [AF] est un côté commun aux deux triangles.

C- $\overline{CF}$ = $\overline{JF}$ car ce sont des côtés du carré ACFJ.

=> Δ JAF iso Δ CFA car si deux triangles rectangles ont leur hypoténuse et un des côté de l'angle droit de même longueur, alors ceux-ci sont isométriques.

XXII) ABC est un triangle isocèle en A, construit la bissectrice issue de B̂ ; elle coupe [AC] en D. Construis la bissectrice de C ; elle coupe [AB] en E. Démontre que $\overline{EC}$ = $\overline{DB}$.



Hypothèse : ABC est un triangle isocèle en A

[BD est la bissectrice de l'angle B̂

[CE est la bissectrice de l'angle Ĉ.

Thèse : $\overline{EC}$ = $\overline{DB}$.

Démonstration :

Considérons les triangles BEC et CDB, ils ont :

A- $\widehat{EBC}$ = $\widehat{DCB}$ car les angles à la base d'un triangle isocèle ont la même amplitude.

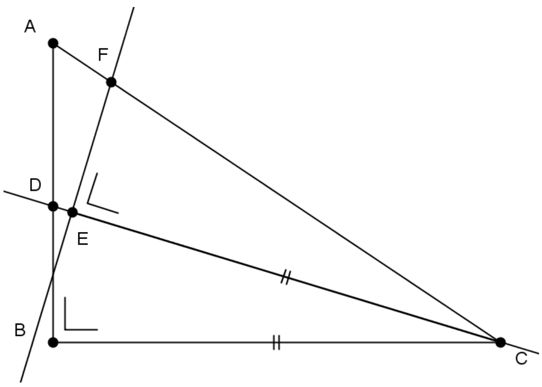
A- $\widehat{ECB}$ = $\widehat{DBC}$ car $\widehat{ECB}$ = $\frac{1}{2}$ $\widehat{ACB}$ car [CE est la bissectrice de l'angle Ĉ et $\widehat{DBC}$ = $\frac{1}{2}$ $\widehat{ABC}$ car [BD est la bissectrice de l'angle B̂ or $\widehat{ABC}$ = $\widehat{ACB}$ car les angles à la base d'un triangle isocèle ont la même amplitude donc $\widehat{ECB}$ = $\widehat{DBC}$

C- $\overline{BC}$ = $\overline{CB}$ c ar [BC] est un côté commun aux deux triangles.

=> Δ BEC iso Δ CDB car si deux triangles ont un côté de même longueur adjacent à deux angles respectivement de même amplitude, alors ils sont isométriques.

=> $\overline{EC}$ = $\overline{DB}$ car les côtés homologues de deux triangles isométriques sont de même longueur.

XXIII) ABC est un triangle rectangle en B. Trace la bissectrice de l'angle Ĉ, elle coupe [AB] en D. Place E sur [DC] tel que $\overline{BC}$ = $\overline{EC}$. Construis ensuite la perpendiculaire à [DC] passant par E : elle coupe [AC] en F. Démontre que les segments [BD] et [EF] sont de même longueur.



Hypothèse : ABC est un triangle rectangle en B.
[CD bissectrice de l'angle Ĉ.
D appartient au segment AB.
$\overline{BC} = \overline{EC}$
E appartient à [DC].
F appartient à [AC]
EF ⊥ DC

Thèse : $\overline{BD} = \overline{EF}$

Démonstration :

Considérons les triangles FEC et DBC, ils ont :

C- $\overline{BC} = \overline{EC}$ par hypothèse

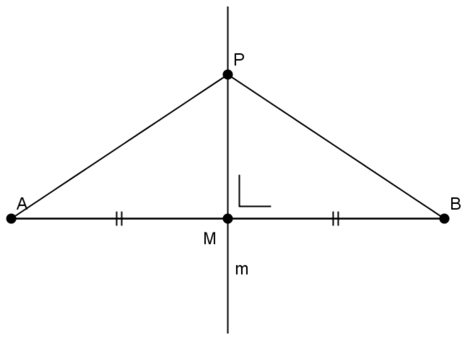
A- $\widehat{DBC} = \widehat{FEC}$ car ABC est un triangle rectangle en B et EF ⊥ DC.

A-$\widehat{BCD} = \widehat{ECF}$ car [CD bissectrice de l'angle Ĉ.

=> Δ FEC iso Δ DBC car si deux triangles ont un côté de même longueur adjacent à deux angles respectivement de même amplitude, alors ils sont isométriques.

=> $\overline{BD} = \overline{EF}$ car les côtés homologues de deux triangles isométriques sont de même longueur.

XXIV) Démontre que tout point de la médiatrice d'un segment est à équidistance des extrémités de ce segment.



Hypothèse : m est la médiatrice du segment AB.
M est le milieu de [AB]
m ⊥ [AB]
P est un point de la médiatrice m.

Thèse :$\overline{AP} = \overline{BP}$

Démonstration :

Considérons les triangles APM et BPM, ils ont :

C- $\overline{AM} = \overline{BM}$ car M est le milieu de [AB]

A- $\widehat{PMA} = \widehat{PMB}$ car m ⊥ [AB]

C- $\overline{MP} = \overline{MP}$ car [MP] est un côté commun aux deux triangles.

=> $\Delta\ APM\ iso\ \Delta\ BPM$ car si deux triangles ont un angle de même amplitude adjacent à deux côtés respectivement de même longueur, alors ceux-ci sont isométriques.

=> $\overline{AP} = \overline{BP}$ car les côtés homologues de deux triangles isométriques sont de même longueur.

XXV) ABC est un triangle quelconque, les points M,N et P sont respectivement les milieux respectivement les milieux de [BC], [AC] et [AB]. Prouve que les triangles BMP, PNA, NPM, et MCN sont isométriques.

Hypothèse : ABC est un triangle quelconque.

M est le milieu de [BC]

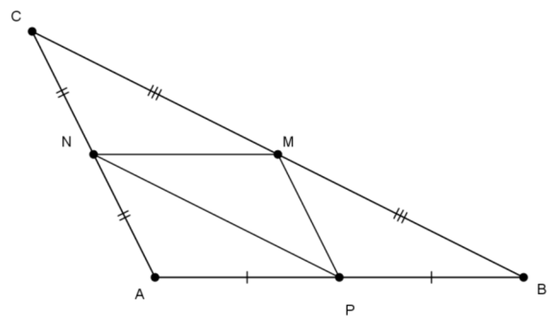
N est le milieu de [AC]

P est le milieu de [AB]

Thèse : $\Delta\ BMP\ iso\ \Delta\ PNA\ iso\ \Delta\ MCN\ iso\ \Delta\ NPM$

Démonstration :

(1) Considérons les triangles BMP et PNA, ils ont :



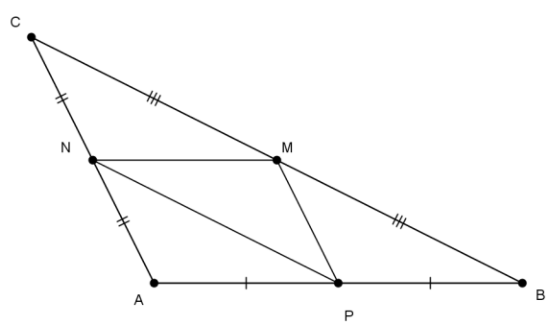
C- $\overline{PB}$ = $\overline{PA}$ car P est le milieu de [AB]

A- $\widehat{MBP}$ = $\widehat{NPA}$ car ce sont des angles correspondants déterminés par les droite parallèle MB et NP et par la sécante PB.

C- $\overline{BM}$ = $\overline{NP}$ car la longueur du segment dont les extrémités sont les milieux de deux côtés consécutifs d'un triangle est égale à la moitié de la longueur du troisième côté.

$=>\ \Delta\ BMP\ iso\ \Delta\ PNA$ car si deux triangles ont un angle de même amplitude adjacent à deux côtés respectivement de même longueur, alors ceux-ci sont isométriques.

(2) Considérons les triangles BMP et MCN, ils ont :



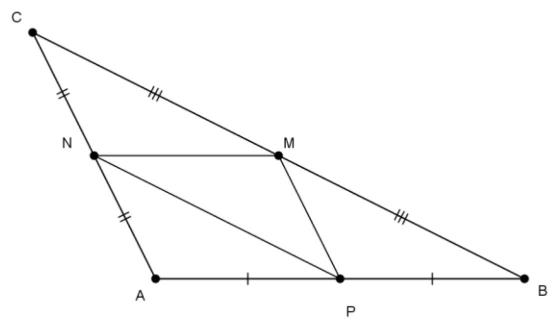
C- $\overline{PB}$ = $\overline{MN}$ car la longueur du segment dont les extrémités sont les milieux de deux côtés consécutifs d'un triangle est égale à la moitié de la longueur du troisième côté.

C- $\overline{BM}$ = $\overline{MC}$ car M est le milieu de [BC]

A- $\widehat{MBP}$ = $\widehat{CMN}$ car ce sont des angles correspondants déterminés par les droite parallèle MN et PB et par la sécante BM.

$=>\ \Delta\ BMP\ iso\ \Delta\ MCN$ car si deux triangles ont un angle de même amplitude adjacent à deux côtés respectivement de même longueur, alors ceux-ci sont isométriques.

(3) Considérons les triangles BMP et NPM, ils ont :



C- $\overline{PM} = \overline{MP}$ car [MP] est un côté commun aux deux triangles.

A- $\widehat{BPM} = \widehat{NMP}$ car ce sont des angles correspondants déterminés par les droite parallèle MN et PB et par la sécante PM.

C- $\overline{PB} = \overline{MN}$ car la longueur du segment dont les extrémités sont les milieux de deux côtés consécutifs d'un triangle est égale à la moitié de la longueur du troisième côté.

$=> \Delta\ BMP\ iso\ \Delta\ NPM$ car si deux triangles ont un angle de même amplitude adjacent à deux côtés respectivement de même longueur, alors ceux-ci sont isométriques.

$=> \Delta\ BMP\ iso\ \Delta\ PNA\ iso\ \Delta\ MCN\ iso\ \Delta\ NPM$